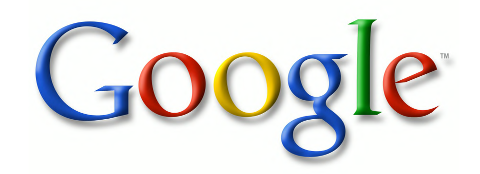


Alexander Ziwet

DIE

ELEMENTE DER MECHANIK

UND

MATHEMATISCHEN PHYSIK.

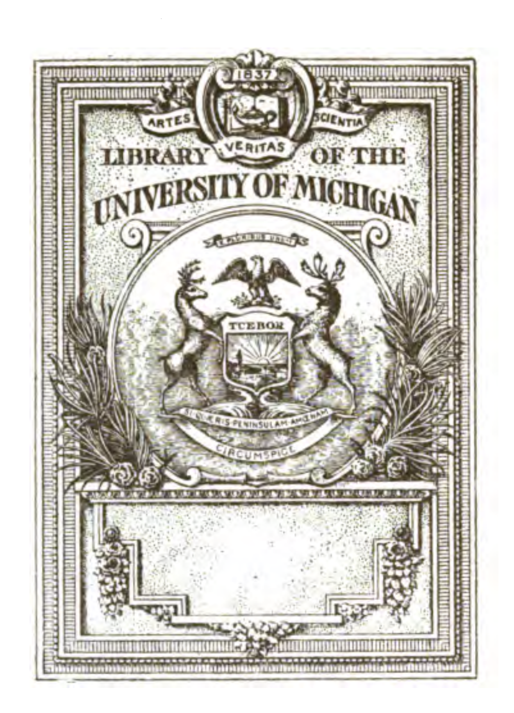
EIN LEHR- UND UEBUNGSBUCH FÜR HÖHERE SCHULEN

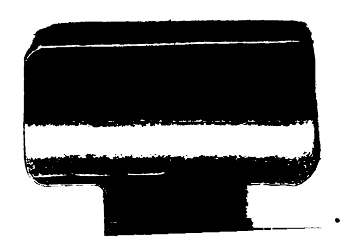
VON

DR. GEORG HELM,
OBERLEHRER AN DER ANNENREALSCHULE ZU DRESDEN.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1884.


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



DIE

ELEMENTE DER MECHANIK

UND

MATHEMATISCHEN PHYSIK.

EIN LEHR- UND UEBUNGSBUCH FÜR HÖHERE SCHULEN

VON

DR. GEORG HELM,

OBERLEHRER AN DER ANNENREALSCHULE ZU DRESDEN.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

Prof Alex. Ziwet
gt.
2-5-1923

Vorwort.

Dieses Buch beabsichtigt, den reichen Bildungsstoff, den die Mechanik darbietet, soweit zu entwickeln, als er den Schülern der oberen Klassen höherer Lehranstalten im Physikunterrichte zugänglich gemacht werden kann. Nur was sich mit elementar-mathematischen Hülfsmitteln aus den Prinzipien der Mechanik folgern läfst, bildet das immerhin schon weite Bereich dieses Buches. Doch habe ich mich nicht gescheut, aus dem so begrenzten Gebiete auch schwierigere Gegenstände aufzunehmen, wo es der Vollständigkeit wegen geboten erschien; das Buch geht daher stellenweise nach Umfang und Tiefe über das hinaus, was von einem zweijährigen Primakurse, der ja aufserdem noch früheren Lehrstoff zu befestigen und zu ergänzen hat, als regelmäfsiges Pensum gefordert werden kann. Ich selbst behandle seit Jahren bei wöchentlich zweistündigem Physikunterricht im ersten Halbjahre der Prima den ersten Abschnitt, im zweiten Halbjahre den gröfsten Teil des zweiten Abschnitts bis etwa § 34; im zweiten Jahre, wo die experimentellen Nachweise und die Ergänzungen des früheren Unterrichts, z. B. die geometrische Optik, viel Zeit erfordern, behandle ich den Stoff der §§ 44 bis 59 mit Auslassung der schwierigeren Stellen. Aus den übrigen Teilen des Buches kann ich immer nur den einen oder andern Gegenstand zur Behandlung auswählen und eine solche Freiheit dürfte auch bei dreistündigem Physikunterrichte dem Lehrer noch bleiben.

Von neueren Ergebnissen der Wissenschaft habe ich alles das herangezogen, aber auch nur das, was nach meinen Erfahrungen geeignet ist, schon bei der ersten Einführung in die Mechanik die Schwierigkeiten zu vermindern.

Das Buch hat sich ein anderes Ziel gesteckt, als die Werke, mit denen man es bei der ersten Durchsicht zu vergleichen geneigt

sein dürfte. Ich hoffe, dafs bei näherer Erwägung, manches anfangs Befremdende als wohlberechtigt erkannt wird; jedenfalls möge man überzeugt sein, dafs alles Wesentliche durch gewichtige Gründe unterstützt werden kann, und vom Verfasser selbst im Unterrichte praktisch erprobt worden ist.

Der volle Bildungsgehalt der mathematischen Physik kommt erst zur Geltung, wenn sie systematisch aus den Prinzipien der Mechanik entwickelt wird und nicht blos als eine Sammlung von Anweisungen zur Lösung physikalischer Aufgaben erscheint. Damit die Übersicht über den einfachen Aufbau des Systems nicht durch die grofse Zahl vielseitiger Anwendungen auf Physik und Technik getrübt werde, sind nur diejenigen Probleme in den Text aufgenommen worden, an denen sich der wissenschaftliche Gedanke hauptsächlich entwickelt hat, alle Anwendungen aber wurden in „Übungen" verwiesen. Diese Übungen sind daher weniger Beispiele zur Einübung des im Texte behandelten Lehrstoffes, als Erweiterungen desselben. Sie bedürfen also, wenn sie als häusliche Aufgaben gestellt werden sollen, zumeist der Vorbereitung durch den Lehrer, ja einzelne müssen gänzlich in der Lehrstunde behandelt werden.

Bei der Abfassung des Buches bin ich durch den Rat zweier Vertreter der in ihm behandelten Wissenszweige unterstützt worden. Ich fühle mich verpflichtet, den Herren Geheimer Rat Prof. Dr. Zeuner und Hofrat Prof. Dr. Töpler dafür an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.

Herrn Sektionsingenieur H. Klette danke ich für die Sorgfalt, mit der er die Figuren nach meinen Entwürfen gezeichnet hat.

Möge es dem Buche beschieden sein, seinen Beitrag zu liefern zur Verbreitung der tieferen naturwissenschaftlichen Bildung!

Dresden, Ende 1883.

Georg Helm.

Allgemeine Mechanik.

I. Beharrung und Kraft.

1. Bewegung heifst die Naturerscheinung, dafs ein Körper seinen Ort im Raume verändert, wobei Zeit verfliefst.

Der Begriff der Bewegung und vereinzelte Bewegungserscheinungen sind zwar seit dem Altertume schon untersucht worden, aber zur wissenschaftlichen Behandlung der Gesamtheit aller Bewegungserscheinungen wurde erst um das Jahr 1600 von Galilei der Grund gelegt; auf diesem Grunde führte um 1680 Newton das Lehrgebäude der Mechanik auf, welches von den Forschern der folgenden beiden Jahrhunderte weiter ausgebaut wurde.

Archimedes von Syrakus † 212, Heron von Alexandria um 250 v. Chr.

Galileo Galilei 1564 Pisa bis 1642 Arcetri (Toscana). 1583 Dom zu Pisa. 1602 Fallgesetze. 1638 Discorsi e dimostrazioni matematiche.

Isaak Newton 1643 Whoolsthorpe (Lincolnshire) bis 1727 London. 1687 Philosophiae naturalis principia mathematica.

Wie Kopernikus' Verdienst seine neue Auffassungsweise der Himmelserscheinungen war, so gelang es Galilei zu einer durchaus neuen Auffassung der Bewegungserscheinungen vorzudringen. Der Wert dieser neuen Auffassung liegt darin, dafs sich aus den wenigen Galilei-Newtonschen Grundgesetzen durch mathematische Entwickelungen alle Bewegungserscheinungen ableiten lassen, wie aus den Axiomen Euklids die geometrischen Wahrheiten folgen. Diese mathematischen Entwickelungen bilden die heutige Mechanik. Sie kann die Erscheinungen der Bewegung beschreiben, ohne sie zu beobachten, also voraussagen — sie kann auch beobachtete Erscheinungen aus den Grundgesetzen mathematisch folgern, also aus den Grundgesetzen erklären. Selbst Erscheinungen, die unsere Sinne nicht als Bewegungen empfinden, haben sich durch passende Annahmen, Hypothesen, als Folgen nicht

wahrnehmbarer Bewegungen betrachten und so den Galilei-Newtonschen Grundgesetzen unterwerfen lassen. So sind diese Gesetze das einfache Mittel zur mathematischen Beschreibung aller Bewegungs-, ja fast aller Naturerscheinungen geworden. Im 1. bis 3. Kapitel werden wir diese Gesetze mit ihren einfachsten Anwendungen kennen lernen.

2. Der Grund- und Eckstein unserer heutigen Mechanik ist der von Galilei erkannte

Satz von der Trägheit oder dem Beharrungsvermögen (inertia):
Ein Körper behält seinen Bewegungszustand, d. h. seine Richtung und Geschwindigkeit, bei, so lange nicht abändernde Ursachen, Kräfte, auf ihn wirken.

Die Richtigkeit und die Bedeutung dieses Gesetzes ergiebt sich aus folgenden Erwägungen: 1. Jede andere Auffassung der Bewegungsvorgänge erscheint schon in den einfachsten Fällen der Anwendung falsch oder doch höchst verwickelt; das gilt insbesondere von der Ansicht, gegen die sich Galileis Satz zunächst richtet, dafs nämlich die Körper das Bestreben hätten am Orte zu beharren. (Freier Fall.) 2. Man kann schon ohne tiefere Untersuchungen zeigen wie naturgemäfs der Satz sich einfachen Erscheinungen anpafst. (Anziehen der Pferde und Anhalten des Wagens im Gegensatz zur gleichförmigen Fahrt; Bewegungen, die in fahrenden Eisenbahnwagen stattfinden; Unglücksfälle auf Eisenbahnen bei Zusammenstöfsen; Auf- und Abspringen während des Fahrens; u. s. f.) 3. Der glänzendste Nachweis für die Richtigkeit der Galileischen Anschauung ist das heutige Lehrgebäude der Mechanik selbst durch seine vollständige Übereinstimmung mit der Erfahrung [1].

3. In der Erklärung des Begriffes Bewegung [1] und im Gesetze von der Trägheit [2] kommen die Worte vor: Raum, Zeit, Richtung, Geschwindigkeit, Ursache. Dieselben sind uns zufolge unserer Geistesanlagen und unserer Erfahrungen allgemein verständlich. Da aber die Mechanik eine m a t h e m a t i s c h e Wissenschaft ist, wird es nötig, jene Worte nicht nur zu verstehen, sondern auch die entsprechenden Dinge als G r ö f s e n aufzufassen und zu m e s s e n. Was heifst messen? Natürliche Mafse.

Die Messung der Raumgröfsen und des Richtungsunterschiedes als einer solchen lehrt die Geometrie. Die Messung wird ausgeführt durch wiederholtes Hinlegen derselben Gröfse.

Messung der Zeit. Die Messung wird ausgeführt durch wiederholten Ablauf desselben Bewegungsvorgangs. Tag (Sterntag, mittlerer Sonnentag).

4. Einteilung der Bewegungsarten der Körper. Fortschreitend bewegt sich ein Körper, wenn alle seine Punkte im gleichen Zeitpunkte gleiche Bewegungsrichtung besitzen. Andere Bewegungsarten.

So lange sich ein Körper nur fortschreitend bewegt, genügt es die Bewegung eines seiner Punkte zu verfolgen. Ein solcher Punkt, der sich wie der Körper — oder eigentlich wie alle anderen Punkte des Körpers — bewegt, wird materieller Punkt genannt, wenn man ihn als Repräsentanten des Körpers auffafst [vergl. 10].

Einteilung der Bewegungsarten eines Punktes oder eines fortschreitenden Körpers erstens nach den Richtungen in verschiedenen Zeitpunkten. Wir betrachten zunächt nur fortschreitende geradlinige Bewegungen; später wird erkannt werden, wie sich andere Bewegungsarten auf diese zurückführen lassen.

Einteilung der Bewegungsarten eines Punktes zweitens nach der Geschwindigkeit. Gleichförmig heifst die Bewegung eines Punktes, wenn derselbe in gleichen Zeitteilen gleiche Wege zurücklegt, wie klein man auch die Zeitteile wählen möge. (Die Bewegung der Uhrzeigerspitze ist nicht gleichförmig.) Andere Bewegungsarten.

5. Gleichförmige Bewegung. Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung wird durch den Weg gemessen, der in einer Zeiteinheit zurückgelegt wird. Daher gilt für gleichförmige Bewegungen

$$s = c \cdot t,$$

wo s (spatium) der in der Zeit t (tempus) mit der Geschwindigkeit c (celeritas) zurückgelegte Weg.

Während der Bewegung ändert sich mit wachsender Zeit der zurückgelegte Weg: er ist eine Funktion der verflossenen Zeit.

Das Mafs der Geschwindigkeit hängt vom Längen- und vom

Zeitmaſs ab, ist proportional jenem, umgekehrt proportional diesem, wie aus der Formel folgt, wenn man setzt

$$s = 1 \text{ m}$$
$$t = 1 \text{ sec}$$
$$c = 1 \text{ Geschwindigkeitseinheit.}$$

Für die Umrechnung bequem ist es daher, die Geschwindigkeitseinheit durch einen Bruch darzustellen, dessen Zähler die Längen-, dessen Nenner die Zeiteinheit.

Ein Fuſsgänger z. B., der in 10 min 1 km zurücklegt, hat die Geschwindigkeit 0,1 km : min. Das ist 1,66 . . m : sec, denn

$$0{,}1 \times 1 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 0{,}1 \times \frac{1000 \text{ m}}{60 \text{ sec}} = 0{,}1 \cdot \frac{1000}{60} \times \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 1{,}66 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Das Geschwindigkeitsmaſs m : sec ist 60 : 1000 mal so groſs, als das Maſs km : min; daher muſs die Maſszahl einer Gröſse 1000 : 60 mal so groſs erscheinen, wenn diese Gröſse in dem Maſse m : sec, als wenn sie in km : min ausgedrückt wird.

(Entsprechend schreibt man das Flächenmaſs m . m = m^2, das Körpermaſs m^3.)

Ein ruhender Körper läſst sich nach den Festsetzungen über die Messung der Geschwindigkeit als ein Körper auffassen, der sich mit der Geschwindigkeit 0 bewegt: die **Ruhe** erscheint nicht als Gegensatz, sondern als besonderer Fall der Bewegung. Wie heiſst das Trägheitsgesetz für diesen Fall?

Man präge sich ein die Geschwindigkeit

des Fuſsgängers	$1\frac{2}{3}$	$\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.
des Reiters und der Wagen .	2 bis 3	
der Eisenbahnzüge	bis 28	
des Sturmes	bis 40	
der Geschosse	400 bis 500	
(des Schalles	333	
des Lichtes	300 Mill.)	

Übungen.

1. Die mittlere Geschwindigkeit von Eisenbahnzügen, Dampfschiffen u. dergl. aus Fahrplänen zu ermitteln in m:sec, km:stunde.

2. Die eigne Marschgeschwindigkeit mit der Taschenuhr und unter Benutzung der Zehntelkilometersteine einer Landstraſse zu ermitteln.

3. Für die eigne Taschenuhr die mittlere Geschwindigkeit der Uhrzeigerspitzen zu bestimmen in mm : sec.

4. Die mittlere Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne anzugeben; ferner die Geschwindigkeit eines Äquatorbewohners infolge der Rotation und die eigne Geschwindigkeit infolge der Erdumdrehung.

5. Wie lange nach dem Glockenschlage hört man in der Schule die Turmuhr oder wie lange nach dem Ausströmen des Dampfes den Pfiff der Locomotive? (Die Entfernungen schätze man [nach Üb. 2], oder entnehme sie dem Stadtplane.)

6. Wie lange braucht das Licht um von der Sonne zu uns, vom nächsten Fixstern zu uns zu kommen, der 234 000 Erdbahnhalbmesser entfernt ist?

7. Jules Verne fabelt von einem gewaltigen Geschosse, in welchem Menschen sich von der Erde nach dem Monde schiefsen lassen. Warum hören diese nicht den furchtbaren Knall der Pulverladung? Wie lange dauert die Fahrt? Mondentfernung 60 Erdradien.

8. Paradoxon des Zenon. Der schnellfüssige Achilles kann keine Schildkröte einholen, wie klein auch deren Vorsprung. Denn erreicht er ihren Ausgangsort A, so ist sie ein Stück fortgekommen nach B, kommt er nach B, ist sie ein Geringes weiter in C u. s. f. Wie löst sich der Widerspruch mit der Erfahrung?

9. Im Seewesen versteht man unter Knoten ein Geschwindigkeitsmafs, dessen Gröfse bei den Marinen der verschiedenen Länder etwas verschieden ist, jedoch immer nahe 0,5 m : sec. Ein Stück Holz passiert den Beobachter am Fockwant $9^h 10^m 21^s$, den am Grofswant $9^h 10^m 47^s$. Die Entfernung beider Marken ist 40 m. Welches ist die Fahrt (Geschwindigkeit in Knoten)? Wieviel Seemeilen (zu je 1852 m) macht das Schiff stündlich?

10. Es sind in 16 sec 54 m geloggt worden. Welches ist die Fahrt? [Üb. 9]

6. Ändert sich die Geschwindigkeit einer Bewegung mit der Zeit, ist sie eine Funktion der Zeit, so heifst die Bewegung ungleichförmig. Das unter [5] angegebene Geschwindigkeitsmafs wird dann unbrauchbar. Die Geschwindigkeit einer beliebigen Bewegung in einem bestimmten Zeitpunkte mifst man durch den Weg, den der Körper in der Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn in dem betrachteten Zeitpunkte plötzlich die Ursachen zu wirken aufhörten, welche bis dahin die Geschwindigkeit veränderten. Diese Definition umfafst die in [5] für gleichförmige Bewegungen gegebene als besonderen Fall. Auffangring der Atwoodschen Fallmaschine.

7. Die Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung kann sich verschieden rasch verändern, woraus man auf verschiedene Gröfse der abändernden Ursachen schliefsen mufs.

Gleichförmig beschleunigt, acceleriert, (bez. verzögert, retardiert) heifst eine Bewegung, wenn die Geschwindigkeit in gleichen Zeitteilen um gleichviel wächst (bez. abnimmt), wie klein man auch die Zeitteile wählen möge. Wir betrachten zunächst nur die gleichförmig beschleunigte Bewegung und werden später zeigen, wie die Untersuchung verzögerter Bewegungen auf die beschleunigter zurückführbar ist. Als Mafs der Beschleunigung benutzt man bei gleichförmig beschleunigten Bewegungen die Zunahme der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit.

Bei beliebigen, ungleichförmig beschleunigten Bewegungen, (deren Beschleunigung also eine Funktion der Zeit ist) wird die Beschleunigung, die in einem gegebenen Zeitpunkte stattfindet, gemessen durch die Geschwindigkeitszunahme, die in der Zeiteinheit stattfinden würde, wenn von dem betrachteten Zeitpunkte an die Bewegung dadurch zu einer gleichförmig beschleunigten würde, dafs die in diesem Zeitpunkte wirkende abändernde Ursache sich unverändert erhielte.

8. Gleichförmig beschleunigte Bewegung. Ein Körper, der bis zu dem Augenblicke, von welchem ab man die Zeit zu messen beginnt, also bis zur Zeit 0 ruht, unterliege von diesem Zeitpunke an einer Beschleunigung p. Dann ist der Definition der Beschleunigung [7] zufolge zur Zeit t seine Geschwindigkeit v (velocitas) geworden

I. $$\boldsymbol{v = p \, . \, t},$$

v ist hiernach eine Funktion der verflossenen Zeit t; es heifst auch Endgeschwindigkeit nach Ablauf der Zeit t. Das Beschleunigungsmafs hängt ab vom Längen- und vom Zeitmafs. Ist jenes m, dieses sec, so mufs man das Beschleunigungsmafs ausdrücken durch m : sec^2, wie aus obiger Formel folgt, wenn man $v = 1\,m : \text{sec}$, $t = 1$ sec, $p = 1$ Beschleunigungseinheit setzt.

Die Beschleunigung z. B., die ein fallender Körper in Mitteleuropa erleidet, ist 9,81 m : sec$^2 = g$ (gravitas) und vertikal nach unten gerichtet, daher ein fallender Körper t Sekunden nach dem Loslassen aus dem Ruhezustande die Geschwindigkeit besitzt

I a. $$v = gt = 9{,}81 \, . \, t.$$

Der Weg s, welchen ein Körper zurücklegt, der von der Zeit $t = 0$ an der Beschleunigung p unterliegt, läfst sich nicht unmittelbar angeben, sondern zunächst nur in Grenzen schliefsen. Seine Länge mufs zwischen den Gröfsen 0 und vt liegen [5], da die Geschwindigkeit von 0 bis v wächst. Die Weglänge läfst sich aber in noch engere Grenzen schliefsen.

Während der ersten Hälfte $\frac{1}{2}t$ der Bewegungsdauer wächst die Geschwindigkeit von 0 auf $\frac{1}{2}v$, daher die Länge des in dieser Zeit zurückgelegten Weges zwischen 0 und $\frac{1}{2}v \cdot \frac{1}{2}t$ eingeschlossen ist. Während der zweiten Hälfte $\frac{1}{2}t$ der Bewegung vergröfsert sich die Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}v$ zu v; deshalb ist die in dieser Zeit zurückgelegte Wegstrecke zwischen $\frac{1}{2}v \cdot \frac{1}{2}t$ und $v \cdot \frac{1}{2}t$ enthalten. Die Zusammenfügung beider Hälften ergiebt

$$0 + \frac{1}{4}vt < s < \frac{1}{4}vt + \frac{1}{2}vt$$

$$\frac{1}{4}vt < s < \frac{3}{4}vt.$$

Die Verengerung der Grenzen läfst sich weiter fortsetzen, indem man die Zeit t in mehr gleiche Teile zerlegt. Man teile sie in n.

Im Zeitteil	wächst die Geschwindigkeit		der zurückgelegte Weg ist	
	von	bis	gröfser als	kleiner als
1	0	$\frac{1}{n}v$	$0 \cdot \frac{1}{n}t$	$\frac{1}{n}v \cdot \frac{1}{n}t$
2	$\frac{1}{n}v$	$\frac{2}{n}v$	$\frac{1}{n}v \cdot \frac{1}{n}t$	$\frac{2}{n}v \cdot \frac{1}{n}t$
....	....	....	....	....
n	$\frac{n-1}{n}v$	$\frac{n}{n}v$	$\frac{n-1}{n}v \cdot \frac{1}{n}t$	$\frac{n}{n}v \cdot \frac{1}{n}t$.

Die Zusammenfügung der Werte in den letzten Kolonnen giebt

$$\frac{1}{n}v \cdot \frac{1}{n}t(0+1+2+\ldots\ldots+\overline{n-1}) < s < \frac{1}{n}v \cdot \frac{1}{n}t(1+2+3+\ldots\ldots+n)$$

$$\frac{1}{n}v \cdot \frac{1}{n}t\,\frac{(n-1)n}{2} < s < \frac{1}{n}v \cdot \frac{1}{n}t\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{1}{2}vt - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}vt < s < \frac{1}{2}vt + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}vt.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ stimmen diese Grenzen mit den oben besonders berechneten. Sind v und t bekannt, so kann man n stets so grofs wählen, dafs der Unterschied der Grenzen unmerklich ist. Wären z. B. v und t so genau gegeben, dafs ihr Produkt bis zur 7. Decimale bekannt wäre, so hätte man n mehr als 10 Millionen mal so grofs zu wählen als jenes Produkt, um zu erreichen, dafs sich s auf 7 Decimalen genau gleich $\frac{1}{2} vt$ ergiebt. Mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit ist also

II. $$s = \frac{1}{2} v . t,$$

Der bei gleichförmig beschleunigter Bewegung zurückgelegte Weg gleicht dem einer gleichlange dauernden gleichförmigen Bewegung, deren Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit jener ist.

Aus I und II folgt, wie jede der während der gleichförmig beschleunigten Bewegung sich ändernden Gröfsen v, s, t aus der anderen berechnet, als Funktion der andern aufgefafst werden kann. Nämlich

III. $$v = p . t \qquad s = \frac{1}{2} pt^2 \qquad \frac{1}{2} v^2 = ps.$$

Insbesondere folgt für die Fallbewegung auf der Erde

III a. $$v = gt \qquad s = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \frac{1}{2} v^2 = gs \quad \text{wo} \quad g = 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

Man bestätigt die Theorie der gleichförmig beschleunigten Bewegung durch später zu besprechende Experimente an der schiefen Ebene (Galilei) und der Atwoodschen Fallmaschine. Eine direkte Bestätigung der Formeln III a. ist wegen der Gröfse von g schwierig. Die Gleichungen enthalten das Gewicht des fallenden Körpers nicht, sprechen also aus, dafs leichte und schwere Körper gleich rasch fallen. Dies widerspricht der alltäglichen Erfahrung nur deshalb, weil bei der Herleitung der Gleichungen III a. auf den Luftwiderstand keine Rücksicht genommen wurde. Dafs wirklich nur dieser die Übereinstimmung der Theorie und der Erfahrung stört, beweist man durch Fallversuche in möglichst luftverdünnten Räumen.

Übungen.

1. Man schätze die Beschleunigung eines Wagens oder eines Eisenbahnzuges beim Abfahren. Z. B.: Wie grofs ist die Beschleu-

nigung eines Pferdebahnwagens, der in 20 sec seine Fahrgeschwindigkeit von 3 m : sec erlangt, gleichförmige Beschleunigung vorausgesetzt?

2. Die Beschleunigung der Schwere ist:

$$\left.\begin{array}{l} \text{am Äquator } 9{,}781 \ldots\ldots \\ \text{in der Breite } \varphi \quad 9{,}781 + 0{,}0505 \sin^2\varphi \\ \text{am Pol } 9{,}8315 \ldots\ldots \\ \text{überhaupt auf der Erde rund } 9{,}8 \ldots \end{array}\right\} \text{m} : \text{sec}^2.$$

Man verwandle die Angaben in par Fufs : sec^2. 1 par Fufs = 0,324 8394 m.

3. Welche Beschleunigung erteilt die Pulverladung einem Geschofs, indem sie im Geschützlaufe von 1 m Länge dessen Geschwindigkeit von 0 bis 400 m : sec steigert? Wie lange bewegt sich das Geschofs im Laufe des Gewehres? Dabei wird angenommen, dafs die Bewegung im Gewehrlaufe gleichförmig beschleunigt sei.

4. Man fülle folgende Tafel aus

	Geschwindigkeit am Ende der	Fallraum am Ende der	Fallraum während der
1. Sekunde	....	....	....
2. Sekunde	....	....	....
.....	....	....	....

5. Galilei, der Entdecker der Fallgesetze, hat dieselben nicht in der Form III a ausgesprochen, sondern in folgender Weise: Die am Ende der einzelnen Sekunden erlangten Endgeschwindigkeiten nehmen zu wie die natürlichen Zahlen. Die während der einzelnen Sekunden durchlaufenen Wege wachsen wie die ungeraden Zahlen. Die bis zum Ablauf der einzelnen Sekunden durchfallenen Strecken sind den Quadraten der natürlichen Zahlen proportional.

Man zeige wie diese drei Sätze aus den Formeln III a. folgen ohne Benutzung der Tafel in Übung 4.

5. Wie lange dauert es, bis ein an der Decke des Schulzimmers oder auf dem Dache des Schulgebäudes losgelassener Stein den Boden erreicht? Welche Geschwindigkeit erlangt er dabei? Dabei sieht man von der Wirkung des Luftwiderstandes ab.

6. Wann und wo treffen sich zwei Körper, deren einer von einem $a = 10$ m höheren Punkt und $\tau = 1$ sec früher herabfällt als der andere?

7. Zwei Körper fallen von einem Punkte herab, der eine $\tau = 1$ sec später als der andere. Wann beträgt ihre Entfernung $a = 20$ m?

8. Der Brunnen auf der Festung Königstein ist 187 m tief. Wie lange dauert es, bis ein hinabfallender Körper unten ankommt, wie lange bis man das Aufschlagen oben hört? Es soll etwa 20 sec

dauern, ehe das Aufschlagen hinabgegossenen Wassers gehört wird. Woher die Abweichung dieser Beobachtung und der Rechnung?

9. Die Geschwindigkeitskurve oder das Bewegungsdiagramm. Statt die Gröfsen Weg, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung durch Zahlen, ihre Mafszahlen, auszudrücken, kann man dieselben auch durch Strecken darstellen und ihre gegenseitige Abhängigkeit nach der von Descartes (1596 bis 1650) erfundenen Methode der analytischen Geometrie veranschaulichen.

Auf einer beliebigen Geraden, der Zeitachse, trägt man von einem beliebigen Punkte, dem Anfange, aus Strecken ab, die Abscissen, welche den von dem Zeitpunkt 0 ab verflossenen Zeiten entsprechen, indem ihre Mafszahlen denen der darzustellenden Zeitstrecken gleichen. In dem Endpunkte jeder Abscisse errichtet man ein Lot, die Ordinate, dessen Länge in gleicher Weise der Geschwindigkeit entsprechend abgemessen wird, welche nach Ablauf der durch die Abscisse versinnlichten Zeitstrecke vorhanden ist. Der geometrische Ort für die Endpunkte der Ordinaten ist die Geschwindigkeitskurve.

Fig. 1.

Übungen.

1. Die Geschwindigkeitskurve der gleichförmigen Bewegung anzugeben und aus [5] herzuleiten, dafs der Weg durch eine gewisse Fläche dargestellt wird.

2. Das Diagramm der gleichförmig beschleunigten Bewegung zu entwickeln. Wie erkennt man die Gröfse der Beschleunigung in der Figur. Die Art, wie in [8] der Weg bestimmt wurde, ist geometrisch nachzuahmen.

3. Am Diagramm zu zeigen, dafs man jede beliebige Bewegung angenähert durch eine Reihe kurzer gleichförmiger Bewegungen ersetzen kann, deren Geschwindigkeiten sprungweise inein-

ander übergehen, und dafs die Genauigkeit der Annäherung eine beliebig grofse sein kann.

4. Die Diagramme gleichförmig beschleunigter Bewegungen mit Anfangsgeschwindigkeit, auch gleichförmig verzögerter Bewegungen zu konstruieren und zu untersuchen. Man zeige, dafs die Verzögerung als negative Beschleunigung aufgefafst werden kann, ferner die Geschwindigkeit wie der Weg aller solchen Bewegungen mit Anfangsgeschwindigkeit als Summe oder Differenz der entsprechenden Gröfsen für gleichförmige und gleichförmig beschleunigte Bewegungen.

5. Jede beliebige Bewegung kann näherungsweise durch eine Reihe kurzer gleichförmig beschleunigter oder verzögerter Bewegungen ersetzt werden, deren Beschleunigungen sprungweise ineinander übergehen. Die Genauigkeit der Näherung kann beliebig gesteigert werden. Beweis?

6. Die Beschleunigung jeder Bewegung wird gemessen durch die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels, den die geometrische Tangente der Geschwindigkeitskurve mit der Achse bildet. Beweis . . . ? [7]. In Fig. 1 stellt tan TPP' die Beschleunigung zur Zeit $t = 6{,}4$ dar.

7. Zu entwickeln, dafs der Weg beliebiger Bewegungen durch eine gewisse, in Fig. 1 schraffierte Fläche, gemessen wird, d. h. dafs jener Weg und diese Fläche gleiche Mafszahlen besitzen.

8. Wie erkennt man am Diagramm stetige (continuierliche) und sprungweise, unstetige (discontinuierliche) Änderungen der Geschwindigkeit, der Beschleunigung?

9. Man zeichne sich aus Geraden und Kreisbögen eine Geschwindigkeitskurve und bestimme die Art der dadurch dargestellten Bewegung, die Beschleunigung und den Weg nach gegebener Zeit.

10. Die Kraft. Jede Ursache, welche die Richtung oder die Geschwindigkeit eines Körpers abändert, nennt man eine auf denselben wirkende Kraft (force). Die Richtungsänderungen kann man, wie später zu zeigen, auf Geschwindigkeitsänderungen zurückführen.

Man vergleicht die Gröfse (Intensität) verschiedener Kräfte, indem man die Beschleunigungen vergleicht, welche sie einem und demselben Körper erteilen, wenn sie nur dessen Geschwindigkeit, nicht seine Richtung abändern.

Man setzt die Kräfte diesen Beschleunigungen proportional, weil immer die Verdoppelung der Kraftquelle die Wirkung verdoppelt. (2 Menschen statt eines.) Gewöhnlich vergleicht man jede Kraft mit der auf denselben Körper ausgeübten Schwerkraft G,

weil deren Beschleunigung $g = 9{,}8$ für alle Körper die gleiche ist. Erteilt also die zu messende Kraft jenem Körper die Beschleunigung p, so hat man für die Gröfse P der Kraft

$$\text{I.} \qquad P : G = p : g \qquad \frac{P}{p} = \frac{G}{g} \qquad P = \frac{G}{g} \cdot p .$$

Dafs wir statt der Kräfte die Beschleunigungen vergleichen, erscheint zunächst unberechtigt, ist aber im Wesen der Sache wohl begründet. Kraft ist ein Name für etwas, das wir nicht beobachten können: nicht die Kraft d. h. die Ursache ist sinnlich wahrnehmbar, sondern nur ihre Wirkung d. i. die Beschleunigung. Eine einzige Ausnahme davon giebt es: seine eigne Kraft nimmt Jeder noch in andrer Weise wahr, als durch die Beschleunigung, nämlich durch die Empfindungen der Kraftanspannung und Ermüdung. Die verschiedene Stärke dieser Empfindungen spricht dafür, überhaupt die Kräfte den Beschleunigungen proportional zu setzen, welche sie ein und demselben Körper erteilen. (Empfindungen bei mäfsigem Zuge, bei kurzem kräftigem Ruck u. dergl.)

Mittels I wird die Gröfse der Kraft P ausgedrückt durch die Gröfse der Schwerkraft oder durch das Gewicht G eines bestimmten Körpers. Dieses wird durch die Wage mit der Einheit, dem Gramm, verglichen. Somit ist auch für die Kraftmessung das Gramm die Einheit, d. i. das Gewicht eines ccm. Wasser (bei gröfster Dichte und in Paris).

Nach I ist für jeden Körper der Quotient aus der Kraft und der von ihr erteilten Beschleunigung eine bestimmte Gröfse. Man nennt diesen Quotienten die Masse m des Körpers und hat

$$m = \frac{G}{g}, \quad \text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{g}$$

$P = mp$, Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung des bewegten Körpers,

Hiernach ist die Masseneinheit abhängig von der Gewichts- der Längen- und der Zeiteinheit und wenn man als solche kg, m, sec wählt, ist sie $1\,\text{kg}\,\text{sec}^2 : \text{m}$. Die Masse von 9,8 Kilogrammstücken ist diese Einheit. Dieselbe Kraft kann verschiedene Körper nur dann in gleicher Weise beschleunigen, wenn diese Körper gleiche Masse besitzen. Daher mufs man einem materiellen Punkt [4] dieselbe Masse zuschreiben, wie sie der Körper besitzt, dessen fortschreitende Bewegung durch die Bewegung jenes Punktes dargestellt werden soll.

Die Zahl m ist eine unveränderliche Gröfse, eine Konstante, für einen gegebenen Körper; man kann sie an ihn anschreiben als Bezeichnung einer unzerstörbaren Eigenschaft desselben. Man betrachtet diese Zahl als ein Mafs für die Menge des Stoffes (der Materie), aus welchem der Körper gebildet ist. [Vergl. 36.] Die anfangs befremdende Thatsache, dafs 1 g und 1 kg gleiche Beschleunigung durch die Schwere erleiden, trotzdem auf dieses eine tausend mal so grofse Kraft wirkt als auf jenes, wird bei dieser Ansicht leicht fafslich: die tausendfache Kraft hat auch eine tausendfache Masse, tausendmal soviel Stoff, zu transportieren.

Das Ergebnis unserer bisherigen Betrachtungen ist folgendes. Die Bewegung jedes Körpers wird bestimmt durch die ihm erteilte Beschleunigung; nur wenn diese sich ändert, ändert sich die Bewegung. Die Beschleunigung aber wird bestimmt durch zwei Dinge: erstens durch ein unzerstörbares Merkmal des Körpers, nämlich seine Masse; zweitens durch äufsere Einflüsse, nämlich durch die von aufsen auf den Körper ausgeübte Kraft.

Übungen.

1. Welche Masse besitzen 9,8 Kilogrammstücke in $g\,sec^2 : cm$?

2. Welche Masse besitzt ein 1 Wasser bei 4^0 C.?

3. Welche beschleunigende Kraft (Zugkraft minus Widerstände) ist nötig, um eine Lokomotive mit Tender (40 000 kg) in 2 min aus der Ruhe in die Schnellzugsgeschwindigkeit 20 m : sec zu versetzen? In welcher Zeit gerät ein Zug mit 10 Wagen (zu je 10 000 kg) in die gleiche Geschwindigkeit?

4[a]. Bei der Atwoodschen Fallmaschine ist, wie später streng abgeleitet werden wird, die beschleunigende Kraft das Übergewicht, die bewegte Masse die der Hauptgewichte, vermehrt um die des Übergewichts. Wie grofs ist die Beschleunigung, wenn jedes Hauptgewicht 500 g, das Übergewicht 10 g wiegt?

4[b]. Welches Übergewicht erzeugt die Beschleunigung 1 $dm : sec^2$, wenn die Hauptgewichte je 100 g wiegen?

5[a]. Beweise, dafs der Impuls oder Antrieb, den eine gleichmäfsig wirkende Kraft P in t sec erteilt, d. h. das Produkt Pt, der erzielten Bewegungsgröfse mv, d. i. Masse $\times$ Geschwindigkeit gleicht.

5[b]. Auch starke Kräfte bringen daher nur geringe Geschwindigkeiten hervor, wenn sie kurze Zeit wirken. Man führe hiernach die Erklärung der Erscheinungen aus, die sich zeigen beim

Schiefsen und Werfen durch eine Glasscheibe, beim Herausschlagen eines Damensteins aus einer Säule solcher u. dergl.

5[c]. Beweise, dafs $2ms = Pt^2$.

6. Einem Stuhlschlitten von 100 kg wird durch den schiebenden Schlittschuhläufer in 5 sec die Geschwindigkeit 2,5 m : sec erteilt. Wie grofs ist die beschleunigende Kraft?

II. Die Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen und Kräfte.

11[a]. In einer geradlinigen Rinne I befinde sich ein Körper A, der sich längs der Rinne bewegen kann, aber auch an den Bewegungen der Rinne teilnehmen mufs. Er sei in Ruhe und die Rinne werde auf der horizontalen Ebene der Zeichnung in einer

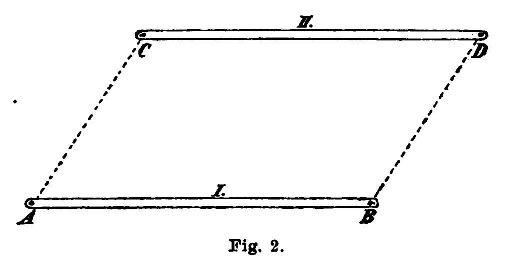


Fig. 2.

gewissen Zeit von I nach II verschoben. Dann kommt A nach C. Bewegt sich aber der Körper längs der Rinne, während diese in I ruhen bleibt, so gelangt er in derselben Zeit nach einem Punkt B. Wenn endlich beide Bewegungen gleichzeitig stattfinden, also der Körper sich längs der Rinne und diese sich auf der Unterlagsebene bewegt, so kommt der Körper in jener selben Zeit nach dem Orte D, der so liegt, dafs $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Indem man sich die Unterlagsebene (die Ebene der Figur) in vollständiger Ruhe denkt, bezeichnet man I II als die absolute Bewegung der Rinne, AB als die relative Bewegung des Körpers zur Rinne, AD als die absolute Bewegung des Körpers. Die letzte ist aus den beiden ersteren zusammengesetzt, die Resultante derselben oder die resultierende Bewegung zu jenen Komponenten oder komponierenden Bewegungen. Das zur Konstruktion benutzte Parallelogramm nennt man das Parallelogramm der Bewegungen.

Das Parallelogramm $ABCD$ kann zu einem linearen Gebilde zusammenschrumpfen, wenn nämlich die Komponenten den Winkel

0 oder 180⁰ bilden. Dann ist $AD = AB \pm AC$, je nachdem die Komponenten $\left\{\begin{matrix}\text{gleiche}\\ \text{entgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ Richtung haben.

Beispiele für die Zusammensetzung einer absoluten und einer relativen Bewegung: Hin- und Hergehen oder Ballspiel auf einem fahrenden Schiffe, einem fahrenden Wagen. Warum beobachten wir keine absolute Bewegung in der Natur?

Wenngleich die Bewegungen AB und AC geradlinig erfolgen, braucht doch AD nicht eine geradlinige Bewegung zu sein. Vergl. Fig. 3, wo die Orte, die nach Ablauf der einzelnen Sekunden er-

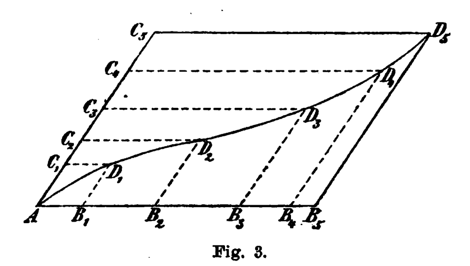


Fig. 3.

reicht würden, wenn eine jede der Bewegungen allein erfolgte, durch gleichhohe Indices bezeichnet sind. Wie müssen die beiden Punktreihen AB und AC beschaffen sein, damit eine geradlinige Bahn AD resultiert?

11ᵇ. Sind insbesondere AB und AC gleichförmige Bewegungen, so ist die resultierende Bewegung AD auch gleichförmig und geradlinig (Beweis?). Nach der Bestimmung über das Messen der Geschwindigkeiten gleichförmiger Bewegungen [5] kann man die Geschwindigkeiten der komponierenden Bewegungen durch Strecken darstellen, nämlich durch die Wege pro Sekunde und findet also die Geschwindigkeit der resultierenden Bewegung als Diagonale des durch jene Wege bestimmten Parallelogramms. Diese Diagonale stellt die Geschwindigkeit der resultierenden Bewegung nach Gröfse und Richtung dar, selbst dann, wenn die komponierenden Bewegungen ungleichförmige sind — wie dies aus dem Begriffe der Geschwindigkeit ungleichförmiger Bewegungen [6] sogleich folgt. Das durch die komponierenden Geschwindigkeiten bestimmte Parallelogramm heifst Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

11^c^. Auch wenn AB und AC gleichförmig beschleunigte Bewegungen (ohne Anfangsgeschwindigkeit) sind, ist die resultierende Bewegung AD eine geradlinige und zwar eine gleichförmig beschleunigte (Beweis?). Die Beschleunigungen der Komponenten lassen sich durch Strecken darstellen [7, 8], nämlich durch die verdoppelten Wege der ersten Sekunde; das durch sie bestimmte Parallelogramm liefert durch seine Diagonale die Beschleunigung der resultierenden Bewegung nach Gröfse und Richtung. Dieses Beschleunigungsparallelogramm ist auch dann anwendbar, wenn die komponierenden Bewegungen ungleichförmig beschleunigte sind [7].

11^d^. Da die auf A ausgeübten Kräfte den Beschleunigungen proportional sind, welche sie erzeugen [10], so lassen auch sie sich durch Strecken darstellen und man findet die resultierende Kraft mittels des durch die komponierenden Kräfte bestimmten Parallelogramms; dasselbe heifst Parallelogramm der Kräfte.

11^e^. Kräfte wie Beschleunigungen und Geschwindigkeiten lassen sich — das ist das Ergebnis der vorstehenden Entwickelung — durch Strecken darstellen, welche mit ihnen in der Richtung übereinstimmen und in der Mafszahl. So wird die Schwerkraft eines Körpers durch eine nach unten gerichtete Strecke dargestellt, deren Mafszahl dem Gewichte gleicht, die Beschleunigung der Schwere durch eine nach unten gerichtete Strecke von 9,8 Längeneinheiten. Wir nennen deshalb Kräfte, Beschleunigungen und Geschwindigkeiten Streckengröfsen. Für alle gleichartigen Streckengröfsen gilt das gleiche Gesetz der Zusammensetzung durch das Parallelogramm der Strecken, dessen anstossende Seiten die komponierenden, dessen Diagonale die resultierende Strecke ist.

Krummlinige Bahnen lassen sich nach Obigem nicht als Streckengröfen auffassen, wohl aber die bei Beschreibung der Bahn zurückgelegten Entfernungen nach Gröfse und Richtung. Eine Strecke, welche die Entfernung eines bewegten Punktes vom Anfangspunkte seiner Bahn nach Gröfse und Richtung darstellt, heifst der Vektor oder Fahrstrahl des bewegten Punktes.

11^f^. Die Lehre von der Auffassung der mechanischen Gröfsen Fahrstrahl, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft als Strecken-

gröfsen und von der Zusammensetzung gleichartiger Streckengröfsen ist an dem Falle entwickelt worden, dafs eine absolute und eine relative Bewegung zusammengesetzt werden, also zwei Bewegungen, deren eine dem bewegten Körper von seiner Unterlage mitgeteilt wird. Es ist nun das zweite Grundgesetz der Galilei-Newton'schen Mechanik, dafs immer zwei von einander völlig unabhängige Bewegungen sich durch das Parallelogramm zusammensetzen, in welcher Weise sie auch dem bewegten Körper mitgeteilt sein mögen.

Satz vom Parallelogramm:

Fahrstrahlen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte sind Streckengröfsen und werden als solche durch das Parallelogramm zusammengesetzt, wenn der Fall eintritt, dafs zufolge zweier verschiedenen Ursachen dem bewegten Körper gleichzeitig zwei gleichartige, von einander unabhängige Streckengröfsen zukommen.

Zur Begründung des Satzes läfst sich das Entsprechende anführen, wie für den Trägheitssatz [2]. Wie dort unter 2) gebe man für einfache Fälle unmittelbare Beobachtungen oder Experimente an. Insbesondere läfst sich der spezielle Fall oft bestätigen, dafs wenn die gegebenen Streckengröfsen gleich sind und einen Winkel von 180^0 bilden, die Resultante verschwindet. In diesem Falle sagt man, dafs die Streckengröfsen im Gleichgewichte stehen: sind es Fahrstrahlen oder Geschwindigkeiten, so bleibt unter ihrem gleichzeitigen Einflusse der Körper in Ruhe; sind es Beschleunigungen oder Kräfte, so ändert ihr gleichzeitiger Einflufs den Bewegungszustand (Richtung und Geschwindigkeit) [2] des Körpers nicht.

Übungen.

1. Zwei Strecken (z. B. Kräfte) wirken zu einander senkrecht auf einen Punkt und haben die Mafszahlen X und Y. Man bestimme die Resultante, d. h. deren Gröfse durch die Mafszahl R und deren Richtung durch den Winkel gegen X oder Y (Trig.). Man vergleiche Rechnung und Konstruktion für $X = \ldots$, $Y = \ldots$?

2. Rechtwinklige Zerlegung einer Strecke: Gegeben eine Strecke R. Gesucht zwei zu einander senkrechte Strecken XY, deren Resultante jene ist. Die Aufgabe ist unbestimmt: Welches ist der geometrische Ort für die Endpunkte von X und Y? Die Aufgabe wird bestimmt, wenn noch $\sphericalangle(RX) = \varphi$ gegeben. (Trig.). Man vergleiche Rechnung und Konstruktion für $R = \ldots$, $\varphi = \ldots$?

3. Zweites Problem der rechtwinkligen Zerlegung. Gegeben R, X. Gesucht Y.

4. Gegeben X, Y, $\sphericalangle(XY) = \alpha$. Gesucht R, $\sphericalangle(XR) = \varphi$, $\sphericalangle(YR) = \psi$.

5. Gegeben R, φ, ψ. Gesucht X, Y. (Trig.) Für besondere Werte vergleiche man Rechnung und Konstruktion.

6. Gegeben R, α, X. Gesucht φ, Y. (Trig.) Determination.

7. Gegeben R, α. Gesucht der geometrische Ort für die Endpunkte von X und Y.

8. Wie vereinfachen sich die Resultate der Üb. 4, wenn $\alpha = 0$ oder wenn $\alpha = 180^0$? (Trig.)

9. Die Entwickelung [11] wiederzugeben für die beiden besonderen Fälle, dafs $\sphericalangle BAC = 0^0$ oder dafs er 180^0.

10. Den Ausdruck $R = X \pm Y$, der in den Fällen $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 180^0$ gilt, betrachtet man stets als Summe (algebraische Summe) und denkt sich die Mafszahlen XY mit gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen behaftet. Gieb Beispiele aus Arithmetik und Geometrie (insbesondere Trigonometrie), wo die Benutzung des Vorzeichens zur Bezeichnung der Richtung üblich und vorteilhaft ist.

11. Neuere Mathematiker nennen die Resultante zweier Streckengröfsen deren Summe, auch wenn α nicht 0^0 oder 180^0 ist. Man vergleiche die Addition der komplexen Zahlen in der Gaufs'schen Zahlenebene. Was hat man dann als Differenz zweier Strecken anzusehen? Zeige, dafs die Gesetze des Addierens und Subtrahierens auch für diese Begriffe gelten, dafs also $a + b = b + a$, $a - b = -b + a$, $a - a = 0$, $a + b \pm c = a \pm c + b = \ldots$, auch wenn durch abc Strecken nach Gröfse und Richtung bezeichnet werden.

Relative Bewegung.

12. Unter welchem Winkel gegen die Vertikale scheinen a) einem Wanderer, b) einem im Wagen, c) einem im Schnellzug Fahrenden die Regentropfen zu fallen, wenn sie in Wirklichkeit vertikal mit (nahe) gleichförmiger Geschwindigkeit von 10 m fallen?

13. Ein Schiff segelt NO mit 6 Knoten bei leichtem Nordwind ($c = 5$ m : sec). Wohin zeigt der Wimpel?

14. Man sieht über sich 2 Wolken in verschiedener Höhe (oder vor sich zwei Schiffe auf See in verschiedener Entfernung), welche gleiche Geschwindigkeit zu haben scheinen. Wie verhalten sich ihre wirklichen Geschwindigkeiten, gleiche Bewegungsrichtung beider Wolken (Schiffe) vorausgesetzt?

12. Das Problem der Ballistik: Die Bahn eines geworfenen Körpers zu bestimmen. Wir beginnen den geworfenen Körper in dem Momente zu betrachten, von welchem an keine

andere Kraft, als die Schwerkraft auf ihn wirkt. Von diesem Augenblicke ab denken wir uns die Zeit t gemessen, die Geschwindigkeit, welche da der Körper besitzt, ist also für unsere Betrachtung die Anfangsgeschwindigkeit. Wir kümmern uns jetzt

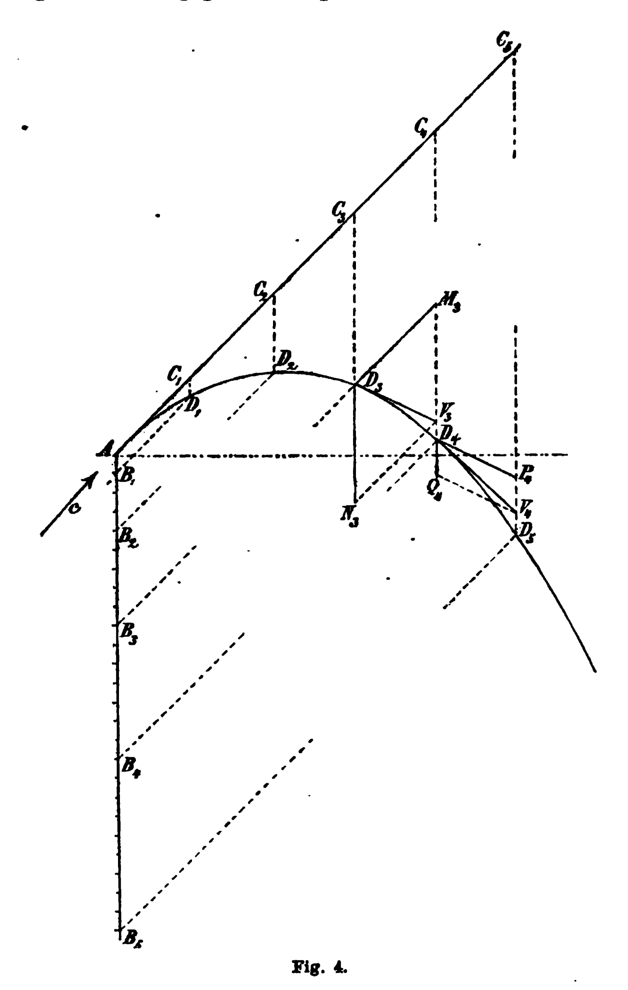


Fig. 4.

nicht um die Vorgänge, denen der Körper diese Geschwindigkeit verdankt: ob sie einem Steine durch die Kraft der menschlichen Hand, einem vom Dache herabgleitenden Ziegel durch die Schwere, einem Pfeile oder Bolzen durch die Elasticität der Sehne, einem Geschosse durch die Pulverkraft im Geschützrohre mitgeteilt worden

ist, — das ist für die Untersuchung des folgenden Verhaltens während des Wurfes gleichgültig.

Zur Zeit $t = 0$ sei der Körper in A. Wirkte auf ihn die Schwere nicht ein, so bewegte er sich gleichförmig in der Anfangsrichtung und erreichte nach 1, 2, 3 . . . sec. die Punkte C_1, C_2, C_3 . . . . [2]. Besäfse andererseits der Körper nur die von der Schwere herrührende Bewegung, was der Fall wäre, wenn er in A anfänglich ruhte, so erreichte er in gleichförmig beschleunigter Bewegung in 1, 2, 3 . . . sec die Punkte B_1, B_2, B_3, . . . deren Entfernungen von A sich nach [8] berechnen lassen. Beide *Bewegungen* setzen sich zusammen [11 a] und nach 1, 2, 3 . . . sec ist der Körper in D_1, D_2, D_3 . . . . So ergiebt sich der Ort des Körpers auch für beliebige Zwischenmomente innerhalb der vollen Sekundenabschnitte.

In jedem Augenblicke ist die *Geschwindigkeit* des bewegten Körpers Resultierende zweier Geschwindigkeiten, der Anfangsgeschwindigkeit, die sich nach [2] erhält, und der Fallgeschwindigkeit, die aus [8] zu berechnen ist. Die Zusammensetzung erfolgt nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten [11 b]. Die Gerade, in der die Resultante liegt, heifst Tangente der Bahn im betrachteten Momente. Von ihr entfernt sich immer wieder die Bahn infolge der Schwere, so dafs sie im nächsten Momente eine etwas anders gerichtete Tangente hat.

Die *Beschleunigung* und die *Kraft* sind immer vertikal nach unten gerichtet, jene hat g, diese mg zur Mafszahl, wo m die Masse des bewegten Körpers [10]. Durch die Beschleunigung oder auch durch die Kraft wird in unserem Falle nicht nur die Geschwindigkeit der Gröfse nach, sondern auch die Richtung derselben geändert [vergl. 10].

Die Bahn eines geworfenen Körpers schrumpft zu einem geradlinigen Gebilde zusammen, wenn c senkrecht nach oben oder unten gerichtet ist. Im ersteren Falle wird das über dem ursprünglichen Horizont liegende Stück der Bahn zweimal durchlaufen. Die Bewegung ist die Resultante aus einer gleichförmigen und einer gleichförmig beschleunigten Bewegung von $\left\{\begin{matrix}\text{gleicher}\\ \text{entgegengesetzter}\end{matrix}\right\}$ Richtung und heifst gleichförmig $\left\{\begin{matrix}\text{beschleunigte}\\ \text{verzögerte}\end{matrix}\right\}$ *Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit.*

Die analytische Behandlung des Wurfproblems erfordert, dafs die Anfangsgeschwindigkeit durch ihre Mafszahl c und ihre Richtung, die mit dem Horizont den Elevationswinkel ε bilde, gegeben sei. Der Ort des bewegten Punktes zur beliebigen Zeit t würde bekannt sein, wenn man seinen Horizontalabstand von A nach vorn, der y heifse, wüfste, und seinen Vertikalabstand vom Horizont des Punktes A nach oben, der x genannt werde. Dabei möge entgegengesetzte Richtung einer Strecke durch entgegengesetztes Vorzeichen angedeutet werden, so dafs ein negatives x Senkung unter den Horizont von A ausdrückt. Zerlegt man nun die Anfangsgeschwindigkeit in die horizontale und die vertikale Richtung, so hat man

1) in horizontaler Richtung nach vorn eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $c \cos \varepsilon$

2) in vertikaler Richtung

a) nach oben eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $c \sin \varepsilon$

b) nach unten eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung g

oder auch in vertikaler Richtung nach oben eine gleichförmig verzögerte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit als Resultante aus a) und b).

Daher folgt

$$1. \quad \begin{matrix} y = c \cos \varepsilon \,.\, t \\ x = c \sin \varepsilon \,.\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{matrix} \qquad 2. \quad \begin{cases} v_{\text{hor}} = c \cos \varepsilon \\ v_{\text{aufw}} = c \sin \varepsilon - g t \,. \end{cases}$$

wobei durch v_{hor} und v_{aufw} die beiden rechtwinkligen Komponenten der Geschwindigkeit v zur Zeit t bezeichnet sind.

Die Gleichungen 1 sprechen aus, wie die Veränderlichen x, y, t, von einander und von den Konstanten c, ε, g abhängen. Durch Elimination von t erhält man die Abhängigkeit zwischen x und y, die Gleichung der Wurfbahn, und erkennt, dafs dieselbe eine Parabel ist.

Die aus den Gleichungen 1 und 2 berechneten Werte stimmen mit den Beobachtungen nicht überein, weil bei der Entwickelung der Gleichungen von dem Einflusse des Luftwiderstandes abgesehen wurde. (Ballistische Kurve). Auch geben die Gleichungen keine Rechenschaft von den drehenden Bewegungen des Geschosses. (Die Rechts-

drehung, welche die Geschosse in gezogenen Geschützen durch den Drall erhalten, bedingt unter dem Einflusse des Luftwiderstandes eine Rechtsabweichung der Flugbahn). Die eben entwickelte Theorie des geworfenen Körpers kann also nur als eine erste Näherung an das wirkliche Verhalten betrachtet werden, an welcher noch Verbesserungen angebracht werden müssen, um den oben genannten Einflüssen Rechnung zu tragen. Die Verbesserungen sind aber stets klein gegenüber den Ergebnissen unserer Gleichungen und sehr abhängig von den wechselnden Zuständen der Luft, so dafs es zweckmäfsig ist, sie nicht theoretisch, sondern in jedem Falle durch praktische Versuche (Einschiefsen) zu ermitteln.

Übungen.

1. Man konstruiere die Wurfbahn für $c = 28\,m:\mathrm{sec}$ und $\varepsilon = 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$ in der Verjüngung $1:1000$ durch Ermittelung der nach Ablauf der vollen und halben Sekunden erreichten Orte und Geschwindigkeiten. Für einige Werte von t berechne man xyv und vergleiche Konstruktion und Rechnung. (Empfehlenswert ist es, an einem um A drehbaren Stabe AC (Fig. 5) in gleichen Abständen c Lote aufzuhängen, deren Längen wie die Quadratzahlen wachsen. Man kann dann durch Drehung um A die Wurfbahnen für alle Elevationswinkel veranschaulichen).

2. Eine Büchse wird vertikal nach oben abgeschossen. $c = 450$ m : sec. Wie hoch und wie lange steigt die Kugel. Wann und mit welcher Geschwindigkeit kommt sie wieder unten an?

3. In dem Augenblicke, wo ein Ball, der mit der Geschwindigkeit $c = 2$ m : sec emporgeworfen wurde, den höchsten Punkt seiner Bahn erreicht, wird ihm ein zweiter mit derselben Geschwindigkeit nachgeschickt. Wo treffen sich beide? Man löse die Aufgabe auch mittels der Geschwindigkeitskurve.

4. Man entwickele die Gleichungen für Ort und Geschwindigkeit eines vertikal nach unten oder nach oben geworfenen Körpers und vergleiche sie mit Gleichung 1 und 2. [Siehe 9, Ü. 4.]

5. Man entwickele die Gleichungen für Ort und Geschwindigkeit eines schief nach unten unter dem Depressionswinkel δ geworfenen Körpers und zeige, dafs Gleichung 1 und 2 den Wurf schief nach unten als Specialfall mit umfassen.

6. Ein Kind kann einen Ball von 100 g gerade bis zur Höhe der Zimmerdecke, 3,5 m, emporwerfen. Welche Geschwindigkeit erteilt es dem Ball und welche Kraft besitzt sein Arm, wenn es die Geschwindigkeit in $\frac{1}{2}$ sec erteilt. Man bestimme so die Ge-

schwindigkeit, die der eigne Arm einem Körper von bekanntem Gewicht zu erteilen vermag.

7. Gegeben c, ε. In welcher Entfernung y_0 kommt das Geschofs wieder in den Ausgangshorizont. Unter welchem Winkel mufs ein Geschütz abgefeuert werden, um das Maximum der Wurfweite y_0 zu erreichen. Wie lange fliegt die Kugel?

8. Gegeben c, ε. Wo liegt der Scheitel der Wurfbahn? Wie grofs ist dort die Geschwindigkeit. Wie lange fliegt das Geschofs bis dahin?

9. Hauptaufgabe der Ballistik: Gegeben xyc. Gesucht ε und t (letzteres für Zeitzünder nötig). Zwei Lösungen: Flacher, steiler Schufs. Zahlenbeispiele:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)}\ \begin{array}{l} y = 100\,\text{m} \\ x = 0 \end{array} & \text{b)}\ \begin{array}{l} y = 1000\,\text{m} \\ x = 0 \end{array} & \text{c)}\ \begin{array}{l} y = 500\,\text{m} \\ x = 0 \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{d)} \\ \text{e)} \end{array} \begin{array}{l} y = 100\,\text{m} \\ x = \pm 20\,\text{m} \end{array} & \begin{array}{l} \text{f)} \\ \text{g)} \end{array} \begin{array}{l} y = 1000\,\text{m} \\ x = \pm 100\,\text{m} \end{array} & \begin{array}{l} \text{h)} \\ \text{i)} \end{array} \begin{array}{l} y = 500\,\text{m} \\ x = \pm 30\,\text{m} \end{array} \end{array}\right\} c = 500\,\text{m : sec.}$$

Man rechne $g = 10$ m : sec^2 und bestimme ε nur auf Minuten.

10. Der zu beschiefsende Punkt kann statt durch seine Koordinaten xy auch durch seine Entfernung d und seinen Höhenwinkel η (Neigungswinkel der Sehlinie gegen den Horizont) gegeben sein. Z. B. Man erblickt unter einem Höhenwinkel von 10^0 einen feindlichen Soldaten in der scheinbaren Gröfse von $3'$ (wahre Gröfse etwa 1,75 m). Wie weit ist er entfernt und unter welcher Elevation mufs man schiefsen, um in jene Gegend zu treffen? $c = 500$ m : sec.

11. Man schiefst nach einer 300 m entfernten Scheibe, deren Centrum im Horizont der Büchsenöffnung liegt und trifft das Centrum. Wie hoch über dem Centrum würde der Schufs eingetroffen sein, wenn die Schwere nicht wirkte; wie tief unter dem Centrum würde der Schufs eintreffen, wenn man die Seele der Büchse genau horizontal richtete? Wie hoch erhebt sich die Flugbahn über den Horizont?

12. Bei zwei Bremsversuchen wurde beobachtet, dafs ein Eisenbahnzug von der Geschwindigkeit 85 bez. 93 km : std in 15 bez. 21 sec zum Stehen gebracht wurde. Wie grofs ist die erzielte Verzögerung? Auf welcher Weglänge werden die Wagen zum Stillstand gebracht? Warum differiert die Rechnung mit der Beobachtung, nach welcher der Stillstand auf 135 bez. 241 m erzielt wurde? (Beispiel für Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit).

13. Ein Körper wurde senkrecht aufwärts geworfen und kommt 10 sec später wieder am Ausgangsort an. Welche Geschwindigkeit hatte er, wie hoch stieg er?

14. Ein fallender Körper durchläuft eine Beobachtungsstrecke $a = 10$ m in $\tau = 0{,}5$ sec. Aus welcher Höhe kommt er?

15. Ein Körper soll so geworfen werden, dafs seine Bahn die beiden Punkte trifft $x_1 = 24$ m, $y_1 = 20$ m; $x_2 = -3$ m, $y_2 = 36$ m.

16. Ein Wasserstrahl soll mit 5 m : sec unter 20^0 Depression auf den höchsten Punkt eines Wasserrades treffen. Wo liegt der Scheitel der Wurfparabel?

Zu weiteren Übungen bieten folgende Beobachtungen auf dem Krupp'schen Schiefsplatze in Meppen Stoff dar:

Die 40 cm Kanone (gröfstes Kaliber) wirft bei einer Ladung von 205 kg prismatischen Pulvers die 775 kg schwere Panzergranate bei 3^0 Elevation 2573,1 m weit bei $c = 502$ m : sec. In 95 m Abstand wurde 500, in 2479 m 434 m : sec Geschwindigkeit beobachtet.

Die 24 cm Kanone wirft bei 75 kg Pulverladung eine 160 kg schwere Granate mit 2^0 Elevation 2078,3 m weit. $c = 576{,}6$. (Geschwindigkeit in 75 m 572,9, in 1979 m 466,9).

Dasselbe Geschütz mit gleicher Pulverladung wirft eine Granate von 136 kg mit $1^0\,43'$ Elevation 2056,2 m weit. $c = 606{,}9$. (Geschwindigkeit in 75 m 602,8, 1979 m 465,8.)

Die 9,6 cm Feldkanone mit 2,65 kg Ladung wirft die Granate von 12 kg Gewicht bei $3^0\,45'$ Elevation 2053,6 m weit. $c = 444$ m : sec. (Geschwindigkeit in 50 m 437,8, in 2000 m 308,0.)

Dasselbe Geschütz giebt bei 2,7 kg Ladung und $\varepsilon = 3^0\,28'$ derselben Granate 2046 m Wurfweite und $c = 452$ m : sec.

Die 28 cm Haubitze giebt einer 216 kg schweren Granate bei

der Pulverladung	u. Elevation	die Wurfweite	wobei die Geschwindigkeit
6 kg	30^0	2103,4	in 7,5 m Abstand
„	60^0	1980,3	158 m : sec
9 kg	30^0	3544,8	in 7,5 m Abstand 204,5
„	60^0	3243,4	
19 kg	45^0	7810,2	in 40 m Abstand 307,8
„	$5\frac{14}{16}{}^0$	2009,9	in 1986,5 m „ 283,2

13ª. Zusammensetzung mehrerer Kräfte. Graphische oder geometrische Methode. Statt die Kräfte (oder Streckengröfsen anderer Art) OA, OB, OC, OD der Reihe nach durch Parallelogramme zusammenzusetzen (Fig. 5 a), kann man sie — unnötige Linien weglassend — einfach eine an die andere nach Gröfse und Richtung anfügen, so dafs ein ungeschlossenes Polygon, ein Kräftepolygon entsteht, wie Fig. 5 b, wo sich die Kräfte

nach der Reihe *ABCD* folgen, oder wie Fig. 5c, wo *BDAC* die Reihenfolge ist. Die Schlufslinie *OR* des ungeschlossenen Polygons liefert die Resultante nach Gröfse und Richtung, wie aus der Kongruenz der Figuren 5b und 5c mit den entsprechenden Stücken von 5a sofort erhellt. Wieviel verschiedene Kräftepolygone, die aber alle die gleiche Resultante liefern, kann man aus den gegebenen vier Kräften bilden?

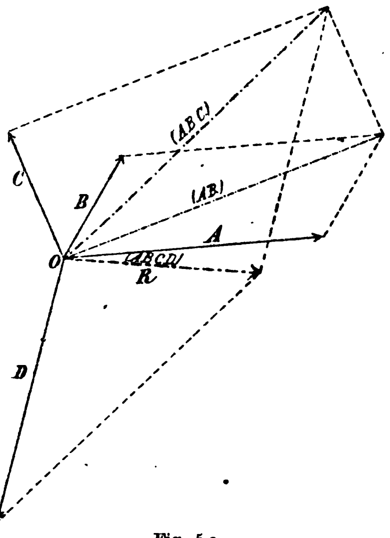


Fig. 5a.

Für die Konstruktion ist gleichgültig, ob die Kräfte alle in einer Ebene liegen oder nicht. Sind im letzteren Falle die Kräfte durch ihre Parallelprojektionen gegeben, so hat man in jeder Projektionsebene die Projektionen der Kräfte zusammenzusetzen um die Projektion der Resultante zu finden; denn die Projektion eines Parallelogramms ist ein Parallelogramm.

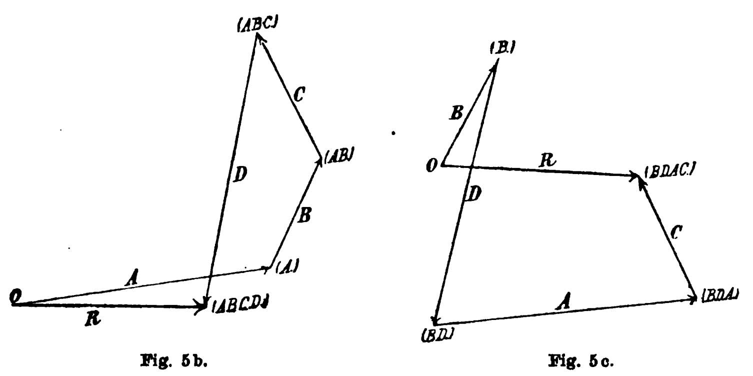


Fig. 5b. Fig. 5c.

Es seien drei Kräfte zusammenzusetzen, die nicht in einer Ebene liegen. Die möglichen sechs Kräftepolygone bilden die Kanten eines Parallelepipeds, dessen vom gemeinsamen Anfangspunkte der gegebenen Kräfte ausgehende Diagonale die Resultante darstellt. Es heifst **Parallelepiped der Kräfte**.

13ᵇ. Zusammensetzung mehrerer Kräfte. Analytische Methode. Man zerlegt alle Kräfte in drei (in der Ebene zwei) zu einander senkrechte Richtungen, sucht die Resultante aller Kräfte gleicher Richtung durch Bildung ihrer algebraischen Summen und setzt die so gefundenen drei, (bez. zwei) Teilresultanten durch Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes zur Hauptresultante zusammen.

Übungen.

1. Drei zu einander senkrechte Kräfte von der Gröfse XYZ sind gegeben. Ihre Resultante hat die Gröfse $R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ und die Richtung ist bestimmt durch $\cos(R, X) = X : R$, $\cos(R, Y) = Y : R$, $\cos(R, Z) = Z : R$, wobei die Summe der Quadrate dieser Cosinus 1 liefert. Beweis? Man vergleiche die Formeln für Zusammensetzung zweier Kräfte, die zu einander senkrecht stehen.

2. Eine Kraft in drei zu einander senkrechte Richtungen zu zerlegen, mit denen sie die Winkel $\alpha\beta\gamma$ bildet (die der Bedingung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ genügen müssen).

3. Gegeben fünf Kräfte P und ihre Neigung α gegen einen festen Strahl ihrer gemeinsamen Ebene.

$$P_1 = 5\,\text{kg} \quad P_2 = 7\,\text{kg} \quad P_3 = 10\,\text{kg} \quad P_4 = 2\,\text{kg} \quad P_5 = 9\,\text{kg}$$
$$\alpha_1 = 30^0 \quad \alpha_2 = 60^0 \quad \alpha_3 = 135^0 \quad \alpha_4 = 270^0 \quad \alpha_5 = -30^0$$

Man bestimme die Resultante 1) graphisch, 2) analytisch. Die Rechnung ordne man tabellarisch an.

4. Gegeben in einer Ebene drei Kräfte P und ihre Neigung α gegen die X-Achse:

$$P_1 = 226\,\text{kg} \quad P_2 = 100\,\text{kg} \quad P_3 = 40\,\text{kg}$$
$$\alpha_1 = 52^0 37' 3'' \quad \alpha_2 = 163^0 22' 12'',7 \quad \alpha_3 = 210^0 11' 37'',3$$

Graphisch und analytisch die Resultante zu bestimmen. (Beim Auftragen der Winkel benutze man ihre Tangenten).

5. An der Ecke eines Würfels greifen drei Kräfte an, die nach Gröfse und Richtung durch die Diagonalen zweier Würfelflächen und durch die Würfeldiagonale dargestellt werden. Die Resultante graphisch (Projektionslehre) und analytisch zu bestimmen.

6. Ein reguläres Polygon kann als geschlossenes Kräftepolygon aufgefafst werden. Welcher Satz über das Gleichgewicht eines Kräftesystems folgt daraus? Denselben analytisch zu beweisen. Man übe zunächst den besonderen Fall des gleichseitigen Dreiecks. — In gleicher Weise behandle man statt regulärer Figuren folgende: Gleichschenkliges Dreieck, rechtwinkliges Dreieck, Parallelogramm, Paralleltrapez, Pentagramm.

7. $(n-1)$ Seiten eines regelmäſsigen n-Ecks können als Kräftepolygon aufgefaſst werden. Welcher Satz über die Resultante eines Kräftesystems folgt daraus? Das Weitere wie in Üb. 6.

III. Freie und unfreie Bewegung.

14. Ein Körper, der auf einer festen horizontalen Platte ruht, unterliegt auſser der Schwerkraft noch einem von der Unterlage herrührenden Einflusse, da ja bei alleiniger Einwirkung der Schwere der Körper nicht ruhen könnte, sondern fallen würde. Dieser Einfluſs der Unterlage wird Reaktion oder Gegendruck derselben genannt und muſs als eine Kraft aufgefaſst werden, welche der Schwere des auflagernden Körpers das Gleichgewicht hält, also dieser entgegengesetzt gleich ist. Man kann die Platte wegnehmen, ohne den Körper zu stören, wenn man nur eine Kraft, wie z. B. den Zug eines Fadens, auf den Körper wirken läſst, die jener Reaktion gleicht.

Andererseits wird die Platte, etwa eine Wagschale, von dem auflagernden Körper gedrückt, sein Gewicht wirkt auf die Platte als Aktion oder Druck.

Also: Der Körper lastet mit seinem Gewichte auf der Platte — Aktion des Körpers auf die Platte — und die Platte trägt das Gewicht des Körpers — Reaktion der Platte auf den Körper. Da Aktion wie Reaktion in unserem Falle dem Gewichte des auflagernden Körpers gleichen, so ergiebt sich für diesen Fall der

Satz von der Aktion und Reaktion:

Aktion und Reaktion haben gleiche Gröſse und entgegengesetzte Richtung.

Dieser Satz ist als allgemeines Naturgesetz von Newton erkannt worden. In der Natur findet nie eine Wirkung allein, sondern stets Wechselwirkung statt. Zur Begründung läſst sich wieder das Entsprechende anführen, wie für das Trägheitsgesetz [2]. Dem dort unter 2) Angeführten gemäſs, führe man die Auffassung von der Aktion und Reaktion aus an Beispielen wie: Ein Körper hängt an einem Faden; zwei Menschen stemmen oder ziehen an einem Stabe, um ihre Kräfte zu vergleichen; niemand kann sich selbst durch Ziehen an einem Stuhle in die Höhe heben u. s. f.

Reaktionen treten stets auf, wenn ein Körper nicht völlige Bewegungsfreiheit besitzt, wenn er verhindert ist, sich in ge-

wissen Richtungen zu bewegen. Sie sind der mechanische Ausdruck für die Ursachen der Freiheitsbeschränkung, für den Zwang, welchen der Körper unterliegt. Sie sind Kräfte, welche denjenigen Kräften das Gleichgewicht halten, die dem Körper versagte Bewegungen hervorbringen würden. Die Reaktion einer ebenen Unterlagsplatte hat daher die Richtung der Normalen nach oben.

Die Reaktion der Unterlage ist eine Wirkung der elastischen Kräfte. Legt man den Körper auf die Unterlage, so wird diese eingedrückt und sucht in die frühere Gestalt zurückzukehren. Bei einer bestimmten Tiefe des Eindrückens ist die zurückführende Kraft dem Drucke des Körpers gleich.

Die Reaktion, die eine Unterlage auszuüben vermag, ist übrigens beschränkt, da die Kohäsion begrenzt ist. (Verschieden schwere Körper auf geronnenem Fett, Gelatine, festeren Unterlagen). Wir nehmen immer an, dafs diese Grenze nicht erreicht sei, die Unterlage also alle in den Beispielen vorkommenden Kräfte durch die Reaktion im Gleichgewicht zu halten vermöge.

15. Die schiefe Ebene. Es befindet sich ein Körper auf einer unter dem Winkel $CAB = \alpha$ gegen den Horizont geneigten Ebene.

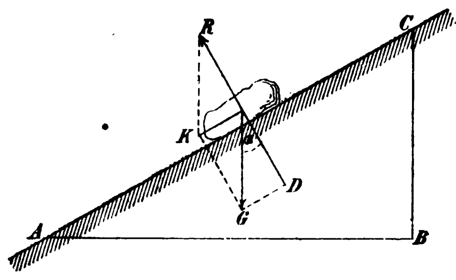


Fig. 6.

Die Schwerkraft G, die auf ihn wirkt, kann man durch zwei Kräfte ersetzen, deren eine K parallel, deren andere D senkrecht zur Richtung der schiefen Ebene wirkt. Letztere mufs durch die Reaktion R aufgehoben werden [14]. Somit bewegt sich der Körper mit einer von der Kraft K herrührenden Beschleunigung p. Wir haben daher die auf den Körper wirkenden Kräfte G, R zu unterscheiden von der ihn beschleunigenden Kraft K, welche die Resultante jener ist. Weil $\sphericalangle (GD) = \alpha$, so ist

1. $K = G \sin \alpha$ und nach [10] $p = g \sin \alpha$.

Auch kann man sich — ohne G zu zerlegen — die Sache so vorstellen: Die schiefe Ebene kann weggedacht werden, wenn ihre Wirkung durch eine Kraft R ersetzt wird, die als Reaktion immer senkrecht zur schiefen Ebene wirkt und deren Gröfse durch die Bedingung bestimmt wird, dafs R mit G zusammen eine Resultante geben mufs, die der schiefen Ebene parallel gerichtet ist.

Betrachtet man statt der unbegrenzten schiefen Ebene nur einen durch zwei horizontale Gerade begrenzten Streifen derselben, so nennt man den Abstand der begrenzenden Geraden Länge, seine Horizontalprojektion Basis, seine Vertikalprojektion Höhe der schiefen Ebene. Der Sinus des Neigungswinkels heifst die Steigung der schiefen Ebene.

Die Aktion A des Körpers auf die schiefe Ebene hat mit R und D gleiche Gröfse, mit D auch gleiche Richtung, wirkt aber auf die Unterlage, während D am Körper wirkt.

Übungen.

1. Welche Kraft mufs ein Arbeiter ausüben, der ein Fafs von 200 kg Gewicht auf der Schrotleiter eines Lastwagens im Gleichgewicht erhält. Der Wagen sei 75 cm hoch, die Leiter 3 m lang.

2. Eine Last von 1000 kg soll durch eine Kraft von 50 kg mittels schiefer Ebene 10 m hoch transportiert werden. Wie lang mufs die Bahn sein? Man leite aus obiger Formel 1 das Gesetz Galileis ab: Auf der schiefen Ebene verhält sich die Kraft zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge.

3. Ein materieller Punkt besitzt zur Zeit $t = 0$ die ab-(auf-)wärts gerichtete (Anfangs-)Geschwindigkeit c und bewegt sich t Sekunden auf der schiefen Ebene ab-(auf-)wärts. Welche Beschleunigung p erleidet er, welcher Art ist also seine Bewegung, welche (End-)Geschwindigkeit v besitzt er, welchen Weg legt er zurück?

4. Auf allen schiefen Ebenen gleicher Höhe erlangen Körper von gleicher Anfangsgeschwindigkeit gleiche Endgeschwindigkeit. Beweis?

5. Alle von C ausgehenden Sehnen eines Kreises über dem vertikalen Durchmesser CB werden in gleicher Zeit durchfallen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit 0 ist (Galilei). Beweis?

6. Kraft, Beschleunigung, Endgeschwindigkeit u. s. w. anzugeben für die besonderen Werte $\alpha = 0, 30^0, 90^0$.

7. Wie hoch steigt ein Körper auf der schiefen Ebene bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit? Was thut er nach Erreichung des Ruhepunktes?

8. Ein Punkt durchläuft den halben Umfang eines regulären Sechs-, Achtecks, dessen mittlere Seite horizontal liegt. Unter der Voraussetzung, dafs an den Bruchstellen der Bahn kein Geschwindigkeitsverlust eintritt, soll man die Geschwindigkeit an den einzelnen Ecken angeben und die Zeit, die beim Durchlaufen der einzelnen Seiten verfliefst. Man zeichne die Geschwindigkeitskurve für den Fall, dafs die Anfangsgeschwindigkeit Null ist.

9. Zu beweisen, dafs ein Punkt, der sich über eine beliebige Reihe aneinander stofsender schiefen Ebenen auf- und absteigend bewegt, eine beliebige Horizontalebene immer mit gleicher Geschwindigkeit passiert — vorausgesetzt, dafs an den Bruchstellen der Bahn Geschwindigkeitsverluste vermieden werden.

10. Zwei begrenzte schiefe Ebenen von gemeinsamer Höhe liegen so, dafs ihre Neigungswinkel α_1 und α_2 in dieselbe Ebene fallen. Auf ihnen liegen Körper von verschiedenem Gewichte $G_1 G_2$, die durch ein Seil verbunden sind, welches etwa mittels einer Rolle über den Grat der schiefen Ebenen geleitet ist. Welches ist die Gleichgewichtsbedingung für die beiderseits am Seile ziehenden Kräfte? Man drücke diese Bedingung auch ohne trigonometrische Funktionen aus und untersuche die besonderen Fälle, dafs α_1 oder α_2 gleich 0^0, 30^0, 90^0.

11. Vor Galilei leitete der Niederländer Stevin 1605 das Gesetz der schiefen Ebene aus folgenden Gründen her: Man denke sich über einen prismatischen Körper ABC, von dem je eine Seitenfläche horizontal und vertikal liegt, eine geschlossene überall gleich beschaffene Kette oder Perlenschnur gehängt. Dieselbe wird in einer bestimmten Gleichgewichtslage verharren. Sie wird nicht darin gestört werden, wenn man sie in A und B noch festhält. Der herabhangende Teil ist also für sich im Gleichgewicht und kann entfernt werden ohne Störung im Gleichgewicht der Stücke AC und BC. Folglich . . . .

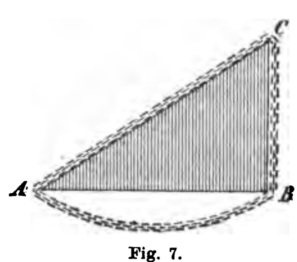


Fig. 7.

Man führe die entsprechende Betrachtung für den in Üb. 10 behandelten Fall durch. Auf welchen Erfahrungssätzen beruht übrigens die Stevinsche Ableitung, auf welchen die Galilei-Newtonsche?

12. Von einem $h = 10$ m über dem Boden befindlichen Punkte A aus bewegen sich zwei Körper mit gleicher Geschwindigkeit $c = 10$ m : sec unter gleichem Winkel $\delta = 30^0$ nach unten, der eine frei, der andere auf schiefer Ebene. Wann, mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel erreicht ein jeder den Boden? Welche Beziehung mufs zwischen c, δ, h stattfinden, damit

die Horizontalprojektion der Wurfbahn die Hälfte von der Basis der schiefen Ebene ist? Antw. $\sqrt{hg} = 2c \sin \delta$.

13. Ein Rechteck $ABCD$ von den Seiten a und b ist gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigt, und hat $CD = b$ mit der anstossenden Horizontalebene gemein. Mit welcher Geschwindigkeit mufs ein Punkt von A in der Richtung nach B gestossen werden, um in C einzutreffen? Unter welchem Winkel kommt er dort an? Wie geht er auf der Horizontalebene weiter, wenn kein Geschwindigkeitsverlust stattfindet?

14. Ein Dach (schiefe Ebene von gegebener Basis) müfste unter 45^0 geneigt sein, wenn das Wasser auf demselben in kürzester Zeit ablaufen sollte. Beweis.

Bewegliche Unterlage.

15. In der Gondel eines Luftballons steht eine Federwage, die mit 1 kg belastet ist. Anfangs ruht die Wage, dann steigt sie 3 sec mit einer Beschleunigung von $2\,\text{m}:\text{sec}^2$, bewegt sich dann 1 min gleichförmig empor und fällt endlich losgelassen zur Erde herab. Welche Last zeigt die Federwage in den einzelnen Stadien der Bewegung an?

16. Welchen Druck übt die Masse m auf eine horizontale Unterlage, die sich mit der Beschleunigung p α) hebt, β) senkt.

17. Die Wirkung zu erklären, welche ungleichförmige Bewegungen der Unterlage auf die Eingeweide des menschlichen Körpers äussern, z. B. beim Schaukeln, auf Seeschiffen.

16. Die Reibung. Versucht man die in [15] abgeleiteten Gesetze der schiefen Ebene experimentell zu prüfen, so zeigen sich erhebliche Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung. Auch hier wie in [8] und [12] ist die Theorie nur als eine erste Näherung an die Wahrheit zu betrachten. Die Abweichung hat auch hier zum Teil ihren Grund in dem Einflufs des Luftwiderstandes, hauptsächlich aber in dem Einflufs der Unterlage auf den bewegten Körper. Durch die Berücksichtigung des letzteren Umstandes nähert man sich der Wahrheit in hohem Grade. Der Einflufs der Unterlage ist nun zwar ein sehr verwickelter Vorgang, man gelangt jedoch zu einer guten Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung durch die von Coulomb über denselben festgestellten Gesetze:

Wenn ein Körper sich über eine Unterlage hin bewegt, entsteht an jeder Berührungsstelle eine seiner Bewegung entgegenge-

setzt gerichtete Kraft F, die auf ihn wirkt, während ebenfalls an jeder Berührungsstelle eine der Bewegung gleichgerichtete Kraft auf die Unterlage wirkt [14]. Jene Kraft F heifst Reibungswiderstand oder Reibung (Friktion) und hat mit dem Luftwiderstand im Gegensatz zu allen anderen Naturkräften das gemein, dafs sie ihrer Natur nach stets der Bewegung entgegengesetzt wirkt.

Die Gröfse der Reibung hängt zunächst ab von der Art der Bewegung; sie ist bei gleitender Bewegung des Körpers über die Unterlage weit gröfser als bei rollender Bewegung. Was heifst Gleiten, Rollen? Bewegung auf Kufen, Rädern, Walzen. Der Wagen und der Schlitten. Zapfenreibung.

Die Gröfse der gleitenden Reibung ist der Aktion und Reaktion R proportional, die zwischen dem bewegten Körper und der Unterlage wirken, oder

$$F = \varphi R.$$

Der Proportionalitätsfaktor φ heifst Reibungskoeffizient und hängt ab von der Beschaffenheit der reibenden Flächen (Material und Bearbeitung derselben). Derselbe beträgt für Metall auf Metall 0,2, für Holz auf Holz 0,3 und kann in beiden Fällen durch Schmiermittel auf 0,06 herabgebracht werden; für trockene Seile auf Holz 0,5; für Eisen auf Eis (Schlittschuhläufer) 0,02. Auch die Reibung, die ein Wagen auf einer Fahrstrasse findet, kann dem Drucke auf die Unterlage proportional gesetzt werden, obschon sie nicht lediglich gleitende Reibung ist. Dabei liegt der Widerstandskoeffizient zwischen $\frac{1}{60}$ und $\frac{1}{10}$. Für Eisenbahnzüge ist der Widerstand der Luft zu berücksichtigen. Über die Bestimmung der Reibungskoeffizienten vergl. [17, 18].

Nicht merklich abhängig ist die Reibung von der Gröfse der sich berührenden Flächen und von der Geschwindigkeit der Bewegung, aufser wenn die Geschwindigkeit sehr gering ist. Bei sehr geringen Geschwindigkeiten ist allerdings die Reibung um so gröfser, je kleiner die Geschwindigkeit (Reibung der Ruhe).

Anders verhält sich die aufser der Reibung an den Berührungsflächen wirkende Adhäsion. Unterschiede, Wirkung der Schmiermittel auf beide.

Die Richtigkeit der über die Reibung angegebenen Gesetze wird bewiesen durch die Übereinstimmung ihrer Folgerungen mit

der Erfahrung [17, 18]. Wirkung der Reibung bei Übertragung von Bewegungen. Anfassen der Gegenstände. Triebräder der Lokomotive. Das Rollen der Räder durch Vermittelung der Reibung. Der Nagel in der Wand. Umwickelung eines Seiles um eine Walze beim Halten schwerer Lasten. Rouleau und Rouleauschnur.

17. Auf einem Schlitten oder Wagen, der auf einer horizontalen Ebene beweglich ist, wirken ein 1) die Schwerkraft G, 2) die Reaktion, welche die Schwere im Gleichgewicht hält, 3) die Zugkraft Z, die auch, wenn ihr Wert negativ, eine hemmende Kraft ausdrücken soll, 4) die Reibung $F = \varphi R$. Daher ist die beschleunigende Kraft

$$K = Z - \varphi G$$

und

$$Z = K + \varphi G.$$

Erfährt der Wagen die Beschleunigung p, so ist $K = \frac{G}{g} p$ [10], daher

$$Z = \frac{p}{g} G + \varphi G.$$

Setzt man $Z = 0$, so erkennt man, dafs Körper, auf welche keine Zugkraft wirkt, bei der Bewegung auf horizontaler Ebene eine Verzögerung φg erleiden..

Übungen.

1. Welche Kraft ist nötig, um 4000 kg durch einen Frachtwagen auf guter Schotterstrafse ($\varphi = 1:50$) fortzuschaffen. Wieviel Pferde braucht man, wenn 56 kg die mittlere Zugkraft eines solchen ist. Dabei geht das Tier mit 1,25 m : sec. Beim Anziehen möge jedes Pferd 75 kg leisten. Wie lange dauert es, ehe der Wagen jene Geschwindigkeit erlangt hat?

2. Dasselbe für schlechte Fahrbahn ($\varphi = 1:15$).

18. Schiefe Ebene mit Berücksichtigung der Reibung. Ein materieller Punkt vom Gewichte G sei auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α beweglich. Auf ihn wirkt 1) die Schwerkraft G, 2) die Reaktion R, die beide zur Resultante die Kraft $G \sin \alpha$ haben [15], 3) die Zug- oder Hemmkraft Z, die positives Zeichen erhalten soll, wenn sie nach oben gerichtet ist, 4) die Reibung $F = \varphi R = \varphi G \cos \alpha$ [16, 15].

Erster Fall. Bewegung nach oben. Ist p_0 die Beschleu-

nigung, positiv in der Richtung nach oben gerechnet, so ist die nach oben beschleunigende Kraft

$$1\text{a.}\quad \frac{G}{g}p_o = Z - G\sin\alpha - \varphi G\cos\alpha = Z - G(\sin\alpha + \varphi\cos\alpha).$$

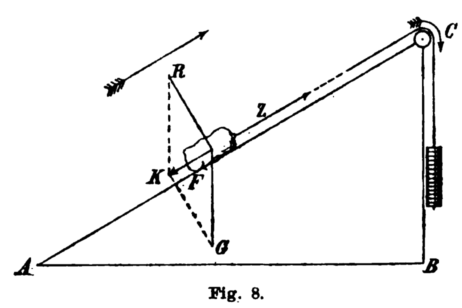


Fig. 8.

Zweiter Fall. Bewegung nach unten. Ist p_u die Beschleunigung, nach unten positiv gerechnet, so folgt die nach unten gerichtete beschleunigende Kraft

$$1\text{b.}\quad \frac{G}{g}p_u = -Z + G\sin\alpha - \varphi G\cos\alpha = -Z + G(\sin\alpha - \varphi\cos\alpha).$$

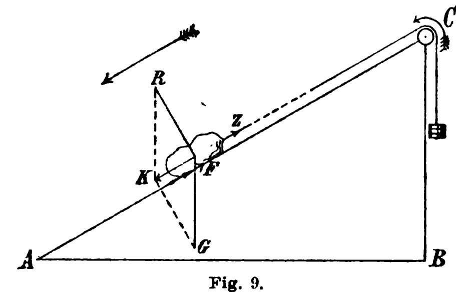


Fig. 9.

Ein Körper wird hiernach auf der schiefen Ebene weder nach oben noch nach unten beschleunigt, ist im Gleichgewicht, wenn

$$2.\quad G(\sin\alpha + \varphi\cos\alpha) \geqq Z \geqq G(\sin\alpha - \varphi\cos\alpha).$$

Der Einflufs der Reibung auf die Gleichgewichtserscheinungen zeigt sich also darin, dafs nicht bei einer bestimmten Kraft Z Gleichgewicht stattfindet, sondern bei allen Werten von Z, die innerhalb zweier Grenzen liegen; der Abstand dieser Grenzen ist um so gröfser, je gröfser der Reibungskoeffizient ist. Das stimmt vollkommen mit den Experimenten überein. Wenn insbesondere keine ziehende oder schiebende Kraft Z wirkt, ist Gleichgewicht, sobald $\sin\alpha \leqq \varphi\cos\alpha$

$$\varphi \geqq \tan \alpha,$$

sobald also der Neigungswinkel weniger beträgt, als ein vom Reibungskoeffizienten abhängiger Winkel, der sogenannte **Reibungswinkel**, dessen Tangente der Reibungskoeffizient.

Wirkt keine Kraft auf den Körper ein aufser Schwere, Reaktion und Reibung, ist also $Z = 0$, so erleidet er bei der Bewegung **nach oben** die Beschleunigung

4 a. $$p_o = -g(\sin \alpha + \varphi \cos \alpha),$$

also eine Verzögerung, bei der Bewegung **nach unten**, aber die Beschleunigung

4 b. $$p_u = g(\sin \alpha - \varphi \cos \alpha).$$

Letztere verschwindet, wenn $\varphi = \tan \alpha$, was auf den oben erwähnten Fall zurückführt. Da p_o wie p_u für jede Bewegung auf gegebener schiefer Ebene unveränderliche Werte haben, so ist die Bewegung auf der schiefen Ebene eine **gleichförmig** beschleunigte, bez. verzögerte.

Übungen.

1. Am oberen Ende einer $\frac{3}{4}$ m hohen, 2,5 m langen schiefen Ebene liegt ein rechtwinklig behauener Stein, $\frac{1}{4}$ m breit und dick, $\frac{1}{2}$ m lang; spec. Gewicht 2. Reibungskoeff. 0,2. (Die Längsdimension liegt senkrecht zur Richtung der schiefen Ebene.) Mit welcher Beschleunigung gleitet der Stein herunter? Wann und mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an?

Welche Kraft mufs parallel der schiefen Ebene nach oben wirken um das Herabgleiten zu verhindern; welche, um ihn hinaufzuschaffen?

2. Man bestimme für einige Materialien durch Versuche den Reibungswinkel (durch Ermittelung einer goniometrischen Funktion).

3. Auf einer schiefen Ebene (für Schulversuche) liegt ein Körper von 1 kg, der an einer Schnur befestigt ist, welche, am oberen Ende über eine Rolle geführt, eine Wagschale trägt.

Bei 30^0 Neigung der schiefen Ebene genügen 520 g um Bewegung nach oben herbeizuführen, während bei 475 g der Körper herabgleitet. Wie grofs ist nach der einen wie anderen Beobachtung der Reibungskoefficient?

Wenn man 500 g in die Wagschale legt, welche Neigungswinkel mufs man dann wählen, um Bewegung nach oben oder unten herbeizuführen?

4. Welche Kraft braucht man, um 4000 kg durch einen Frachtwagen auf guter trockner Schotterstrafse mit 1 : 40 Steigung α)

emporzuziehen, β) vor dem Herabrollen zu schützen (durch Einhemmen). [Vergl. 17, Üb. 1.]

5. Der Reibungskegel. Setzt man F mit R zusammen, so erhält man die Gesamtkraft R', mit welcher die reibende Unterlagsebene den auf ihr sich bewegenden Körper beeinflufst. Erwägt man, dafs dem Körper Bewegung nach allen Richtungen der Ebene freisteht, so ergiebt sich als geometrischer Ort aller möglichen R' ein gewisser Kegelmantel. Wie mufs in bezug zu diesem die Resultante aller aufser F und R wirkenden Kräfte liegen, um den ruhenden Körper in Ruhe zu erhalten; wie, um ihn in Bewegung zu setzen? Hieraus die Sätze in [17, 18] zu entwickeln, insbesondere das Gleichgewicht auf wenig geneigten Ebenen bei blofser Wirkung der Schwere.

19. Einteilung der Mechanik. Die bisher behandelten Probleme des Falls, Wurfs und der schiefen Ebene gestatten die Gliederung darzulegen, die in der Behandlung aller mechanischen Probleme nachgewiesen werden kann. Darnach teilt man die Mechanik ein in

1. Kinematik (*κίνημα* Bewegung), welche die Bahnen und Bewegungszustände untersucht, die bei gegebenen Freiheitsbeschränkungen den einzelnen Punkten eines Körpers überhaupt noch aus geometrischen Gründen zukommen.

2. Statik (stare), welche die Kräfte angiebt, die auf den Körper wirken, einschliefslich der durch Freiheitsbeschränkungen hervorgerufenen Reaktionen. Insbesondere bestimmt die Statik die Kraft oder die Kraftgruppen, welche die wirkenden Kräfte zu ersetzen vermögen und diejenigen, welche denselben Gleichgewicht halten, daher sie auch Lehre vom Gleichgewicht genannt wird.

3. Dynamik (*δύναμις* Kraft). Sie giebt für jeden Zeitmoment den durch die einwirkenden Kräfte hervorgerufenen Bewegungszustand des Körpers an.

Man weise an einzelnen der früheren Übungen, besonders über horizontale und schiefe Ebenen, den kinematischen, den statischen und den dynamischen Teil des Problems nach.

IV. Die Energie.

20. Die unter dem Einflusse der Schwerkraft stattfindenden freien oder unfreien Bewegungen, wie sie in den vorigen Kapiteln betrachtet wurden, haben eine wichtige Eigenschaft gemein. Man denke sich zwei horizontale Ebenen, zwei Niveauflächen, die

eine in der Höhe h über der anderen. Ein Körper vom Gewichte G oder der Masse m kann nun zwar auf sehr vielfache Weise aus dem einen Niveau in das andere übergehen — durch Fall, Wurf, auf einer oder mehreren schiefen Ebenen — immer aber besteht solange allein die Schwere wirkt, die Beziehung

$$1. \qquad \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = Gh$$

wenn v_0 die Gröfse der Geschwindigkeit im oberen, v im unteren Niveau bedeutet.

Man beweise diese Behauptung für den freien Fall, wo $v_0 = 0$, den senkrechten Wurf nach unten und oben, sowie für die Bewegung auf einer schiefen Ebene, die aus dem einen ins andere Niveau ragt, indem man die Geschwindigkeit als Funktion des zurückgelegten Weges darstellt. (Man eliminiere t, erweitere mit m.) Für den schiefen Wurf ergiebt sich, wenn ε_0 den Elevationswinkel der Geschwindigkeit im oberen Niveau bezeichnet: [12, Gl. 2 quadrieren, addieren]

$$v^2 = v_0^2 - 2\,gt\,v_0 \sin \varepsilon_0 + g^2t^2.$$

Wegen $-h = v_0 \sin \varepsilon_0 t - \frac{1}{2} gt^2$ [12, Gl. 1] folgt

$$v^2 = v_0^2 + 2\,gh$$

folglich ......

Endlich beweist man die Behauptung für Bewegungen, die auf mehreren schiefen bez. horizontalen Ebenen, oder für Bewegungen, die teils auf solchen, teils frei erfolgen, indem man durch die beliebig zahlreichen Übergangsstellen aus einer Bewegungsart in die andere horizontale Hilfsniveaus legt. Auf die so getrennten einzelnen Bewegungen kann man nun die obige Beziehung anwenden. Addiert man die erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich die Richtigkeit der Behauptung auch für die Gesamtbewegung, vorausgesetzt nur, dafs an den Übergangsstellen nicht Geschwindigkeitsänderungen stattfinden.

Man gelangt zu einem einfachen Wortausdrucke für die Gleichung 1, indem man folgende Begriffe bildet:

> Das Produkt aus halber Masse und Quadrat der Geschwindigkeit nennt man die kinetische Energie der Masse (auch lebendige, aktuelle Energie, lebendige Kraft, Energie der Bewegung, Wucht), (ἐνέργεια Thatkraft, κινητικός zum Bewegen gehörig)

Das Produkt aus Gewicht und Fallhöhe nennt man die von der Schwerkraft auf den Körper geleistete mechanische Arbeit (travail, work).

Mit Benutzung dieser Begriffe kann man die Gleichung

$$1. \qquad \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = Gh$$

ausdrücken in den Worten

Satz von der mechanischen Arbeit:

Die Zunahme der kinetischen Energie gleicht der geleisteten Arbeit.

Aus den Definitionen der kinetischen Energie und der Arbeit folgt, dafs beide Gröfsen durch die Mafseinheit kg . m gemessen werden. Diese Einheit nennt man geradezu das Kilogrammeter oder das Meterkilogramm und versteht natürlich darunter die Arbeit, die geleistet wird, wenn 1 kg 1 m fällt, oder die gebraucht wird um 1 kg 1 m ohne Entwickelung kinetischer Energie zu heben (oder 2 kg $\frac{1}{2}$ m u. s. f.).

Da als Mafseinheit der Energie das Produkt aus irgend einer Gewichtseinheit (nicht notwendig kg) und irgend einer Längeneinheit (nicht gerade m) verwendet werden kann, so nennt man Länge × Gewicht die Dimension der Energie. So ist auch (Länge)² Dimension der Fläche, (Länge)³ Dimension des Volums, Länge : Zeit, Dimension der Geschwindigkeit u. s. f.

Die Schwere vermag umsomehr Arbeit zu leisten, je höher der Körper sich befindet, auf welchen sie wirkt. Die Arbeit, die durch sie auf den Körper höchstens geleistet werden kann, indem

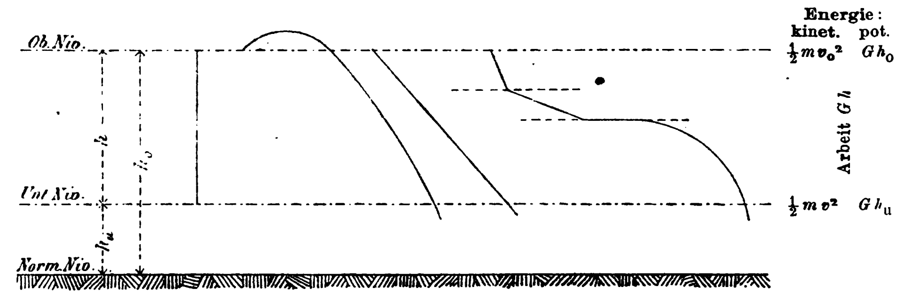


Fig. 10.

derselbe nämlich bis zu dem möglichst tiefsten Niveau sinkt (Dielenfläche des Zimmers, Erdboden, Meeresniveau u. s. f.), heifst potentielle Energie des Körpers über diesem Niveau. Die Gröfse

derselben hängt zunächst von der Wahl dieses Normalniveaus ab, welches man so tief lege, dafs keine der in Betrachtung stehenden Bewegungen unter dasselbe führen kann. Nachdem das Normalniveau einmal gewählt ist, hängt die potentielle Energie eines bestimmten Körpers über demselben nur noch von seiner Höhe über dem Niveau ab. Verändert man die Lage des Normalniveaus, so verändert man alle potentiellen Energien über ihm um ein und dieselbe Gröfse. Verlegte man es daher auch in unbegrenzte Ferne, so änderte man alle in Betracht stehenden potentiellen Energien nur um eine Konstante. Wir können daher definieren:

> Die Arbeit, welche von der Schwerkraft auf einen Körper überhaupt geleistet werden kann, heifst die potentielle Energie des Körpers (Spannungsenergie, Energie der Lage, Arbeitsladung) (potentia — posse — Macht, Wirkungsfähigkeit wie δύναμις). Sie unterscheidet sich um eine Konstante von der potentiellen Energie über dem so tief wie nötig zu wählenden Normalniveau.

Die Arbeit, welche die Schwere bei der Bewegung aus einem höheren in ein tieferes Niveau zu leisten vermag, ist gleich der Differenz der potentiellen Energien, der Potentialdifferenz des Körpers in diesen Niveaus, und so ergiebt sich der

Satz von der Erhaltung der Energie:

Die Zunahme der kinetischen gleicht immer der Abnahme der potentiellen Energie, die Gesamtenergie ist unveränderlich.

Übungen.

1. Man beweise Gl. 1 für die gleichförmig beschleunigte Bewegung mittels der Geschwindigkeitskurve.

2. Welche potentielle Energie besitzt ein Ziegel von 2 kg der sich 20 m über dem Erdboden auf einem Dache befindet? Wodurch ist ihm diese Energie erteilt worden? Wenn sich nun diese potentielle Energie durch Herabfallen des Ziegels entladet, in kinetische E. verwandelt, mit welcher Geschwindigkeit erreicht dann der Ziegel den Erdboden? Wieviel Energie ist in 10 m Höhe noch potentiell, wieviel schon kinetisch?

3. Welche kinetische E. besitzt eine Kugel von 50 g, die mit 500 m : sec abgeschossen wird? Wie hoch steigt sie, wenn sie vertikal nach oben abgeschossen wurde? — Wenn sie unter 60^0, 30^0 abgeschossen wurde, steigt sie nicht so hoch, weil dann nie die kinetische E. völlig in potentielle umgesetzt wird. Wieviel bleibt kinetisch und wie hoch steigt die Kugel nur?

4. Man löse frühere Aufgaben mittels des Energiegesetzes z. B. [15. Üb. 4, 7, 8, 13].

5. Ein Punkt bewegt sich längs einer Geraden AB, während eine Kraft P, unter dem Winkel β gegen die Gerade geneigt, auf ihn wirkt. Man zeige, dafs auch dann das Gesetz von der mechanischen Arbeit (Gl. 1) gilt, wenn man definiert:

Arbeit einer beliebigen Kraft ist das Produkt aus Kraft und Projektion des Wegs auf die Kraftlinie.

Diese Begriffserklärung geht, wenn die wirkende Kraft die Schwere ist, in die oben gegebene über. Unter welcher Bedingung ist einfach Arbeit = Kraft $\times$ Weg? Wie grofs ist die Arbeit einer Reaktion?

Wie hat man die gesamte Arbeit zu berechnen, wenn die Richtung der Kraft und der Bewegung und die Gröfse der Kraft sich beliebig oft sprungweise ändern?

6. Welche Arbeit hat ein Tier geleistet, wenn es einen Wagen von 600 kg aus der Ruhe in die Geschwindigkeit 2 m : sec versetzt hat (ohne Berücksichtigung der Reibung). Falls dies auf einer Strecke von 16 m geschehen ist, läfst sich auch die bewegende Kraft des Tieres, die Beschleunigung, die Dauer des Anziehens berechnen. Wie grofs ist der Effekt, d. i. die Arbeit pro sec, gemessen nach kg.m:sec und nach Pferdekräften (à 75 kg.m:sec).

Entsprechend behandle man: [10 Üb. 3, 6.]

7. Welche Arbeit leisten die Pulvergase eines Geschützes (40 cm Kanone), wenn die Kugel von 775 kg mit 502 m : sec das Rohr verläfst? Ist dieses 8,711 m lang, wie grofs ist die mittlere beschleunigende Kraft?

8. Der Schüler berechne die kinetische Energie, die er durch seine Muskelkraft dem eignen Körper zu erteilen vermag beim a) Weitsprung, b) Hochsprung, c) Sturmlauf.

9. Nach Kruppschen Angaben giebt

	bei der Pulverladung	einer Granate von	die Anfangsgeschwind.
die Kruppsche 9,6 cm Kanone	2,7 kg	12 kg	452,5
Russische 10,7 cm „	2,05	12,5	400
Französische 9,5 cm „	2,1	10,84	443
Englische 16 Pfünder „	1,36	7,25	414
„ 25 „ „	1,82	11,3	402,5

Wie grofs ist in diesem Falle die kinetische Energie, sowie die kinetische Energie pro kg Ladung? Aufl. für die Kruppsche Kanone 125,2 mt.

10. Die 40cm Kanone [Üb. 7] erteilt eine kinetische Energie, die man berechnen und mit der einer Schnellzugslokomotive (30 000 kg, 25 m : sec) vergleichen soll.

(Weitere Übungen bieten die [12] angegebenen Kruppschen Beobachtungen.)

11. Über die mittleren Leistungen der Menschen und Tiere bei 8stündiger mittlerer Arbeitszeit hat man folgende Mittelwerte:

Mensch, 70 kg schwer, leistet 14 kg bei 0,78 m : sec mittl. Geschw.
Pferd, 375 „ „ „ 56 „ „ 1,25 „ „ „
Ochse, 300 „ „ „ 56 „ „ 0,78 „ „ „

Man berechne den Effekt [Üb. 6] und die Arbeit pro Tag.

21. Aus [18, Gl. 4 b.] folgt, dafs wenn ein Körper sich auf schiefer Ebene aus dem oberen Niveau ins untere bewegt und dabei der Reibung F auf seinem Wege s unterliegt, die Gleichung gilt

$$Gh + \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m v^2 + Fs \text{ für Bewegung nach unten.}$$

(Zum Beweise eliminiere man t aus den Formeln für v und s.) D. h. die anfängliche Energie findet sich am Ende der Bewegung nur teilweise als kinetische wieder, der Teil Fs ist für Überwindung der Reibung verwendet worden. Entsprechend folgt aus [18, Gl. 4 a]

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 + Gh + Fs \text{ für Bewegung nach oben.}$$

D. h. die anfängliche kinetische Energie findet sich am Ende teilweis als kinetische und potentielle wieder, der Teil Fs ist auch hier für Reibung verwendet worden. In beiden Fällen scheint der Betrag Fs an Energie durch Reibung vernichtet worden zu sein.

Man bedenke aber, dafs während der Bewegung noch andere Veränderungen eingetreten sind, als die Verwandlung kinetischer in potentielle Energie oder umgekehrt, die ohne Einflufs der Reibung stattgefunden hätte. Diese weiteren von der Reibung verursachten Veränderungen sind Zerstörung des bewegten Körpers und der Unterlage an den reibenden Flächen (Abschleifen), Erschütterungen des Körpers und der Unterlage, sowie der umgebenden Luft (Geräusche, Töne), auch elektrische Ladungen und dergl., hauptsächlich aber Erwärmung des Körpers und der Unterlage. Beispiele aus alltäglicher Erfahrung. Da die zuerst genannten Erscheinungen im natürlichen Verlaufe der Naturvorgänge zumeist verschwinden und dabei Erwärmung an ihre Stelle tritt, so kann man sagen, dafs der wegen der Reibung verschwundene Energieanteil sich fast durchgehends als Wärme im bewegten Körper, der Unterlage und der Umgebung wiederfindet.

Die Wärme aber, die ein Körper besitzt, mufs als Energie betrachtet werden, da sie mechanische Arbeit zu leisten vermag. Auf die Tragweite dieser Erkenntnis hat zuerst Robert Mayer 1842 aufmerksam gemacht und die Arbeit berechnet, welche die auf Ausdehnung eines Gases verwendete Wärme leistet. Es ergiebt sich, dafs eine Calorie 425 kg . m leistet. Man kann also die Wärme nach kg . m messen und hat damit ein mechanisches Mafs der Wärme, d. h. ein Mafs, welches nur auf die Einheiten der Mechanik (m, sec, g) gegründet ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dafs auch für jeden durch Reibung verschwundenen kg. m Energie eine bestimmte Menge Wärme entwickelt wird, nämlich 1 : 425 Calorie. Dies hat Joule 1850 experimentell bewiesen, nachdem bereits Rumford es zu beweisen versucht hatte.

Hier erschliefst sich uns das eigentliche Wesen der Reibung. Damit sich ein Körper über eine Unterlage hin bewege, mufs er entweder mit den Unebenheiten seiner Oberfläche über die Unebenheiten der Unterlage weggehoben werden, oder die Unebenheiten müssen abgestossen werden. Zu beiden Vorgängen ist Energie erforderlich, welche für die kinetische Energie der Körperbewegung verloren geht.

Der Luftwiderstand, der sich dem freien Fall und Wurf im lufterfüllten Raume entgegensetzt, hat wie die Reibung seine Ursache in dem Verlust an kinetischer Energie, den in diesem Falle der bewegte Körper deswegen erleidet, weil er um vorwärts zu kommen, die umgebende Luft bewegen, ihr also kinetische Energie mitteilen mufs. Diese Bewegungen der Luftteile werden durch die sogenannte innere Reibung der Luft allmählich vernichtet und in Wärme verwandelt.

Satz von der Äquivalenz der Energien:
Die auf Überwindung der Bewegungswiderstände verwendete Energie erscheint unter anderen Formen in äquivalenten Mengen wieder, insbesondere als Wärme, von der 1 cal äquivalent ist 425 kg . m.

Die in diesem Kapitel entwickelte Lehre von der Erhaltung und Äquivalenz der Energie [vergl. dazu 38] ist eine der gröfsten Errungenschaften der neuesten Zeit. Auf die Bedeutung der Begriffe Arbeit und kinetische Energie wurde man durch Huyghens am Ende des 17. Jahrhundert aufmerksam und bediente sich ihrer besonders in der Technik [39, Üb.]. Das Maschinenwesen, nämlich

die Untersuchung der Dampfmaschine, gab auch im Anfange des 19. Jahrhunderts die ersten Anregungen zur Erkenntnis der Äquivalenz von Wärme und Arbeit. Nachdem Robert Mayer den Satz von der Äquivalenz 1842 ausgesprochen hatte, hat unter den Deutschen besonders Helmholtz 1847, dann in England William Thomson, die umfassende Bedeutung dieses Satzes durchschaut. Man erkannte, dafs für alle Körper und alle Kräfte, dafs für die gesamte uns bekannte Natur der Satz gilt:

Die Energie ist unzerstörbar.

Vergl. Helmholtz, Populäre wissenschaftliche Vorlesungen.

Übungen.

Aus früheren Aufgaben: [12, Üb. 12; 17, Üb. 1 u. 2; 18, Üb. 1 bis 4.]

1. Ein Eisenbahnzug von $c = 75$ km : std wird auf einer Strecke von 255 m Länge und 5 ‰ Gefälle durch Bremsen zum Stehen gebracht. Welche Energie verbrauchen die Bremsen? Wie grofs ist der Reibungskoefficient während des Bremsens?

2. Ein Handschlitten gleitet aus 5 m Höhe auf einer Bahn, deren Steigung 1 : 4 ist, herab. Wie weit fliegt er dann noch über die horizontale Ebene? Reibungskoeff. 0,02. (Die potentielle Energie ist schliefslich durch Reibung verbraucht.)

3. Rumfords Versuch. Ein Pferd treibt $2\frac{1}{2}$ Stunde lang durch Göpelwerk einen Kanonenbohrer um. Die Kanone steht in 12 kg Wasser, das in der angegebenen Zeit zum Sieden kommt. Pferdekraft 75 kg . m : sec. Man berechne das Wärmeäquivalent. Warum ist das Resultat falsch?

4. Robert Mayers Berechnung. 1 kg oder 773,4 l Luft von 0^0 und 760 mm Druck dehnt sich unter diesem Drucke durch Erwärmung um t^0 aus. Wie weit schiebt sie den absperrenden Stempel (oder das absperrende Quecksilberniveau), wenn sie sich in einem unausdehnsamen Cylinder befindet? Welche Arbeit leistet sie? Wieviel Wärme mufs ihr zu diesem Zwecke zugeführt werden, wenn 0,2377 und 0,1686 die beiden spezifischen Wärmen sind? Wie grofs ist das Wärmeäquivalent?

5. Von 30 m Höhe gleitet auf schiefer Ebene ein Körper herab, geht auf die Horizontalebene ohne Geschwindigkeitsverlust über und bewegt sich auf ihr noch so weit als die schiefe Ebene lang ist. Reibungskoeff. auf beiden Ebenen 0,1. Wie lang ist die schiefe Ebene, wie stark ihre Neigung?

6. Auf einer schiefen Ebene von der Höhe h und Basis b fällt ein Körper herab und geht ohne Geschwindigkeitsverlust auf die Horizontalebene über, auf der er noch die Strecke l durchläuft. Wie grofs ist der auf beiden Ebenen gleiche Reibungskoeff. φ?

Mechanik des starren Körpers.

V. Die Zusammensetzung der Kräfte am starren Körper.

22. Die Molekeln eines festen oder flüssigen Körpers werden durch Kohäsionskräfte in ihrer Lage erhalten. Wirken nun äufsere Kräfte auf den Körper, so bestimmt die Kohäsion nicht mehr allein die Lage der Molekeln, die Körperteile werden daher ihre gegenseitige Lage ändern, der Körper gerät in Erschütterungen und verändert seine Gestalt. Beispiele.

In zahlreichen Fällen ist aber die Veränderung der gegenseitigen Lage der Molekeln unwesentlich oder gar so gering, dafs sie sich überhaupt der Beobachtung entzieht. Daher ist es zweckmäfsig von den inneren Erschütterungen und den Formänderungen der Körper vorläufig abzusehen und diese später einer gesonderten Betrachtung zu unterwerfen. Wir betrachten also im folgenden nur solche Bewegungszustände, bei denen die einzelnen Teile jedes Körpers ihre gegenseitige Lage nie verändern — oder, mit andern Worten, wir stellen uns vor, dafs es Körper gebe, die unfähig sind Erschütterungen und Formänderungen zu erleiden. Solche Körper nennen wir starr.

Ein solcher Körper, sowie jeder seiner Teile, ändert während seiner Bewegungen nur die Lage, nicht Gröfse oder Gestalt, er bleibt sich immer kongruent.

Wir kennen nur zwei Hauptarten von Bewegungen, die ein starrer Körper auszuführen vermag: die fortschreitende und die drehende Bewegung, denn alle Bewegungen die nicht aus diesen beiden Arten zusammengesetzt sind, bedingen gegenseitige Verschiebungen der Molekeln, Abweichungen von jener Kongruenz.

Die Kinematik des starren Körpers hat es also nur mit fortschreitenden und drehenden Bewegungen zu thun und mit solchen, die sich aus diesen zusammensetzen lassen.

Die Statik des starren Körpers wird auf folgenden Satz gegründet: .

Grundsatz vom starren Körper:

Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, welche in derselben Kraftlinie auf einen starren Körper wirken, stehen im Gleichgewicht.

Die Erfahrung lehrt nämlich, dafs solche Kräfte auf feste Körper dehnend oder zusammendrückend wirken, schliefslich auch zerreissend oder zerdrückend, nie aber den Körper als Ganzes verschieben oder drehen. Da nun vom starren Körper vorausgesetzt wird, dafs seine Teile gegenseitiger Verschiebungen unfähig seien, so kann derselbe weder gedehnt noch zusammengedrückt werden, ist also unter den angegebenen Bedingungen überhaupt im Gleichgewicht.

Alles, was aus dem Grundsatz vom starren Körper mittels der Sätze der allgemeinen Mechanik hergeleitet wird, findet daher auf feste Körper Anwendung, falls die wirkenden Kräfte gewisse Grenzen nicht überschreiten, nämlich nicht merkliche Dehnungen oder Zusammendrückungen durch entgegengesetzt gleiche Kräfte derselben Kraftgeraden erzeugt werden; ferner finden die mechanischen Folgerungen aus dem Grundsatze vom starren Körper auf jeden (festen oder flüssigen) Körper Anwendung, der unter dem Einflufs der Kräfte in einen Gleichgewichtszustand geraten ist.

Aus unserem Grundsatze folgt: Jede Kraft am starren Körper kann in der Kraftlinie verschoben werden, ohne dafs sich ihre Wirkung veränderte.

Um nämlich K vom Punkte A nach dem Punkt B der Kraftlinie zu verlegen, füge man dort die Kräfte $K_1 K_2$ an, die gleich grofs und in derselben Kraftlinie liegen wie K und bez. gleich und entgegengesetzt wie K gerichtet sind. Diese Zufügung ändert die Wirkung von K nicht, da K_1 und K_2 im Gleichgewichte stehen. Dem Grundsatze vom starren Körper zufolge steht aber auch K_2 mit K im Gleichgewicht, also wirkt K_1 ebenso wie K.

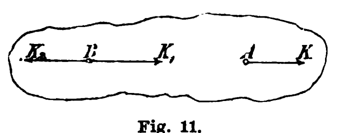


Fig. 11.

Wir stellen auch am starren Körper wie früher am Punkte die Kraft durch eine Strecke dar, deren Anfangspunkt — der Angriffspunkt der Kraft — mit jedem anderen Punkte der

Kraftlinie vertauscht werden kann. Analytisch müssen wir die Kraft darstellen durch ihre Gröfse oder Intensität, ihre Richtung und ihren Angriffspunkt.

Zusatz. Als ein Gegenstück zum starren Körper kann man das vollkommen biegsame Seil (Faden, Kette) betrachten. An diesem sind zwei entgegengesetzt gerichtete gleiche Kräfte derselben Kraftlinie im Gleichgewicht, wenn sie das zwischen ihren Angriffspunkten liegende Seilstück spannen. Einem geraden Seilstücke entlang kann man also jede Kraft verlegen, nur mufs sie immer spannen.

23. In der Statik des starren Körpers leistet wesentliche Dienste der Begriff des Moments der Kraft (momentum d. i. movimentum von movere). Unter dem Moment einer Kraft K in einem beliebigen Punkte P versteht man das Produkt aus der Kraft K und dem Abstande ihrer Geraden von P — dem Hebelsarm der Kraft — das Produkt positiv oder negativ genommen, je nach der durch die Richtung der Kraft K angezeigten Umlaufsrichtung um P. Dieses Produkt ist identisch mit der Fläche des Parallelogramms, das durch K als eine Seite und P als einen Punkt der Gegenseite bestimmt ist, wenn man dieser Fläche ein Vorzeichen beilegt, das abhängt von der Richtung des um sie im Sinne der Kraftrichtung ausgeführten Umlaufes (also z. B. davon, ob dieser Umlauf in Uhrzeigerrichtung stattfindet oder nicht; oder ob man bei diesem Umlaufe die umlaufene Fläche zur Linken hat oder zur Rechten).

I. Durch Verlegen einer Kraft in ihrer Geraden wird ihr Moment nicht geändert.

Beweis leicht, wenn man das Moment als Parallelogrammfläche betrachtet.

II. Das Moment der Resultante zweier an einem Punkte angreifenden Kräfte ist gleich der Summe der Momente der Komponenten für jeden Punkt in der Ebene des Kräfteparallelogramms.

Beweis: $$\begin{aligned} OAA'P + OBB'P &= OAA'P + ACC'P' \\ &= OMM'P + MCC'M' \\ &= OCC'P. \end{aligned}$$

Der Beweis gilt für beliebige Lage des Punktes P in der Ebene des Parallelogramms der Kräfte OA, OB, wenn die Flächen nach obiger Regel mit Vorzeichen behaftet werden. Vergl. Fig. 12.

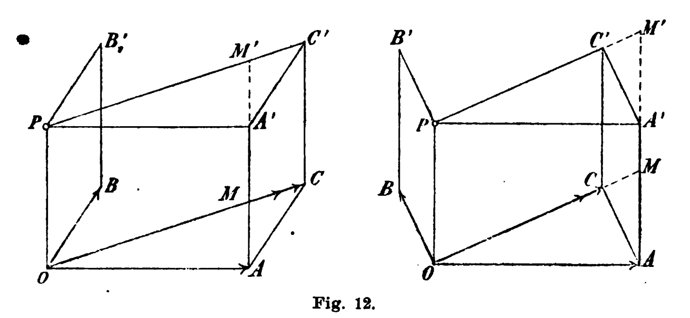


Fig. 12.

Übungen über die Einführung negativer Flächen.

1. Ist P ein Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, so ist $\triangle PAB + PBC + PCA = ABC$, sobald man das Vorzeichen jedes Dreiecks von der Richtung des Umlaufs abhängig macht. Thut man letzteres nicht, so ist der Satz nur bei speciellen Lagen von P richtig.

2. Sind ABC und $A'B'C'$ zwei kongruente Dreiecke derselben Ebene in paralleler Lage entsprechender Seiten (perspectivisch affin), so ist die Summe der drei Parallelogramme gleich Null, welche durch Verbindung der entsprechenden Punkte beider Dreiecke entstehen. Auch für die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes ist die Vorzeichenbedingung wie bei Üb. 1 nötig.

3. Aus Üb. 2 leite man den Satz von Varignon ab: Ist P ein Punkt in der Ebene des Parallelogramms $ABCD$, so ist $PAB + PAD = PAC$, hieraus den obigen Satz II.

4. Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, in denen eine gegebene Kraft ein gegebenes Moment hat (z. B. das Moment 0)? Wo liegen alle Kräfte, die in einem gegebenen Punkte ein gegebenes Moment besitzen?

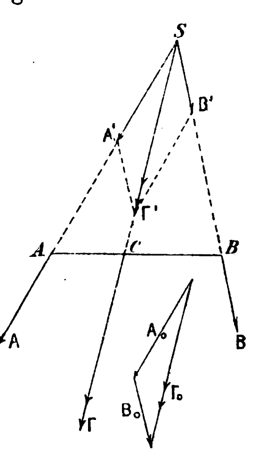


Fig. 13.

24. Zusammensetzung der Kräfte, die in einer Ebene liegen. AB sind die Angriffspunkte zweier Kräfte AB. (In AB sind auf der Tafelebene zwei Stifte angebracht, an welchen gespannte Fäden

ziehen.) Fig. 13 zeigt, wie man nach [22] und [11 d.] die Kräfte zu einer Resultante Γ zusammensetzt, falls sich die Kraftlinien schneiden. Γ ist nach Gröfse, Richtung und Kraftlinie bestimmt, der Angriffspunkt kann aber auf der Kraftlinie willkürlich gewählt werden z. B. in *S* oder in *C*. Die Zusammensetzung der Kräfte braucht nicht im Schnittpunkt *S* ihrer Kraftlinie zu erfolgen: man kann irgendwo das Kräftepolygon konstruieren und zur gefundenen Schlufslinie Γ_0 eine Parallele durch *S* ziehen.

Fig. 14 zeigt die Abänderung, welche eintritt, wenn man den Kräften AB zwei Hülfskräfte $H_1 H_2$ zufügt, welche [22] im Gleichgewicht stehen. Die Resultante von A und H_1 setzt man mit der

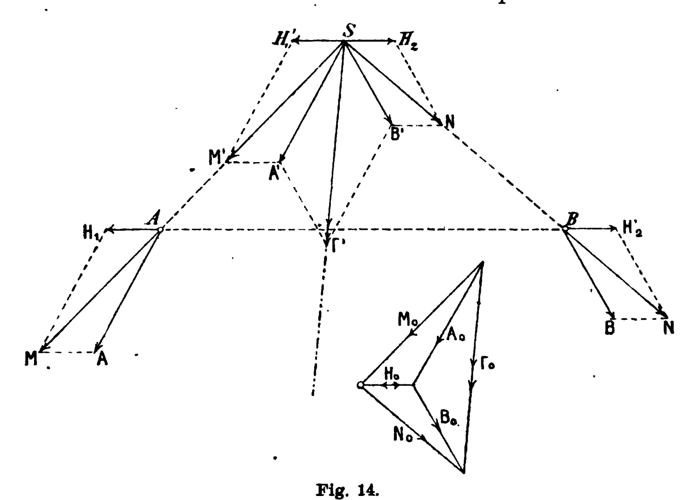


Fig. 14.

von B und H_2 im Schnittpunkt *S* ihrer Kraftlinien zusammen und findet dieselbe Strecke Γ als Hauptresultante wie nach Fig. 13. Man setzt statt der gegebenen Kräfte AB zwei gleichwirkende MN zusammen. Die Zusammensetzung läfst sich auch in einer besonderen Figur, dem Kräftepolygon ausführen.

Dieses Verfahren ist ohne weiteres auch dann anwendbar, wenn AB parallele Kräfte sind. Fig 15 a., 15 b. In diesem Falle ist

$$\Gamma = A + B, \quad \Gamma \parallel A \parallel B,$$

wenn man den Kräften gleiches oder entgegengesetztes Zeichen giebt, sobald sie gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben.

Zur Bestimmung der Lage der Kraftlinie bedient man sich der Momente der Kräfte. Aus [23 I, II] folgt

Das Moment der Resultante zweier in derselben Ebene am starren Körper wirkenden Kräfte gleicht der Summe der Momente der Komponenten in jedem Punkte dieser Ebene.

Insbesondere folgt hieraus für jeden Punkt der resultierenden Kraftgeraden

$$\mathsf{A}a = \mathsf{B}b$$

wo ab die Abstände dieses Punktes von den Kraftgeraden AB bezeichnen. Ist $\mathsf{A} \parallel \mathsf{B}$ so hat ein Punkt der resultierenden Kraftlinie eine merkwürdige Eigenschaft, der Durchschnittspunkt der resultierenden Kraftlinie mit der Verbindungslinie AB der Angriffspunkte der Kräfte. Man nennt diesen Punkt C den **Mittelpunkt** der parallelen Kräfte. Wählt man ihn als Momentenpunkt, so folgt (Fig. 14)

$$\mathsf{A} : \mathsf{B} = b : a = BC : AC$$

er teilt die Verbindungslinie der Angriffspunkte AB im umgekehrten Verhältnis der Kräfte — innen, wenn dies Verhältnis gröfser als 0, oder die Kräfte gleiches Zeichen haben (Fig. 15a), andernfalls aufsen. (Wie konstruiert man also am einfachsten die Resultante zweier parallelen Kräfte?) Seine Lage hängt

Fig. 15a.

Fig. 15b.

also nur von den Gröfsen AB, nicht von der Richtung der Kräfte gegen die Linie AB ab. Dreht man AB um ihre Angriffspunkte AB (ohne ihren Parallelismus zu stören), so dreht sich die Resultante Γ um den Mittelpunkt der Kräfte C.

Die in Fig. 14 angewendete Methode läfst sich zur Zusammensetzung beliebig vieler Kräfte der Ebene erweitern. Fig. 16 zeigt das Verfahren für den Fall, dafs drei Kräfte $A_1 A_2 A_3$ zu einer Resultante K zusammengesetzt werden. Man bildet das Kräftepolygon (1, 2, 3) und wählt die Hülfskräfte H, die zur

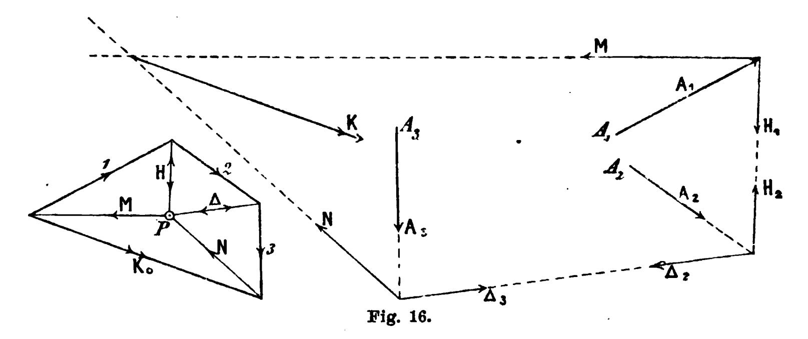


Fig. 16.

Zusammensetzung von A_1 und A_2 dienen, sowie die zur Zusammensetzung von A_2 und A_3 nötigen Hülfskräfte Δ, indem man einen willkürlichen Punkt P, den Pol, wählt. Nun kann man A_1 ersetzen durch M und H_1, A_2 durch H_2 und Δ_1, A_3 durch Δ_2 und N und da H_1 mit H_2, Δ_1 mit Δ_2 im Gleichgewicht, so werden die drei gegebenen Kräfte durch zwei ersetzt, M und N, deren Schnittpunkt ein Punkt der Resultante K ist. Die Kraftlinien M, H, Δ, N bilden ein Polygon, das Seilpolygon, so genannt, weil ein biegsames Seil unter dem Einflufs der gegebenen Kräfte A und der Kräfte + M, + N im Gleichgewicht ist, wenn es die Form jenes Polygons angenommen hat.

Auf diese Weise lassen sich beliebige Kräfte am starren Körper, welche in derselben Ebene liegen, durch zwei Kräfte MN ersetzen und, falls diese sich schneiden, durch eine einzige. Im Gleichgewicht kann das ebene Kräftesystem nur dann sein, wenn die ersetzenden Kräfte MN entgegengesetzt gleich sind und in derselben Kraftlinie wirken. Dafür ist aber ein Kennzeichen, dafs die Summe ihrer Momente und also auch die Summe der Momente

der gegebenen Kräfte in jedem Punkte der Ebene verschwindet, was der Fall ist, wenn es für drei willkürliche Punkte stattfindet, die nicht in einer Geraden liegen.

Übungen.

1. An den beiden Endpunkten einer $a = 9$ dm langen geraden Stange AB wirken zwei Kräfte, A = 3 kg unter 135^0 gegen AB geneigt im Punkte A, B = 6 kg normal gegen AB in B. Die Kräfte sollen zusammengesetzt werden a) wenn sie nach derselben, b) wenn sie nach verschiedenen Seiten von AB wirken. Was ändert sich am Resultat, wenn der Neigungswinkel nicht 135^0 sondern 45^0 ist?

2. Unterstützt man die Stange [Üb. 1] im Angriffspunkt C der Resultanten, so ist sie unter dem Einflusse der Reaktion P und der Kräfte AB im Gleichgewicht. Wie grofs ist P, wie gerichtet? Eine solche um einen Punkt drehbare Stange heifst ein Hebel. (Ein-, Zweiarmige, Winkel-Hebel). Man beweise allgemein das Hebelgesetz (Archimedes): Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält, umgekehrt wie die Hebelsarme. (Archimedes' Beweis: 28, Üb. 18.)

3. Versuche am Hebel zur Bestätigung der Theorie. An einem um C drehbaren Stabe (der für sich im Gleichgewichte ist, vergl. 28) hängen verschieblich zwei Gewichte, links vom Drehpunkt $P = 200$ g, rechts $Q = 50$ g. Befindet sich P in $p = 2$, 4, 8, 10 cm Abstand von C, wohin mufs Q geschoben werden, um Gleichgewicht zu erzielen? — Oder: links hängt eine unbekannte Last L in $l = 3$ cm Abstand von C; $P = 50$ g mufs man auf $p = 7\frac{1}{2}$ cm Entfernung schieben, um Gleichgewicht herzustellen. Wie grofs ist L? (Römische Schnellwage). Man gebe in allen Fällen die Reaktion des Lagers an.

4. An den Enden einer Stange von $l = 25$ cm Länge hängen $P = 50$ bez. 90, 120, 240 g und $Q = 75$ bez. 45, 180, 60 g. Wo mufs die Stange unterstützt werden, um im Gleichgewicht zu sein? Wie grofs ist die Reaktion? Man rechne 1) nach dem Hebelgesetz, 2) nach dem Momentensatz, indem man ein Stangenende zum Momentenpunkt nimmt.

5. Über eine horizontale Brücke von 24 m Spannweite fährt eine Lokomotive von 40 t Gewicht. Wie verteilt sich ihre Last auf beide Widerlager, wenn sie 0, 6, 12, 18, 24 m von dem einen entfernt ist. Warum ist die Lösung nur angenähert?

6. Ein Sicherheitsventil verschliefst eine Öffnung von 2,5 cm Weite und wird durch einen einarmigen Hebel niedergedrückt, der mit 3 kg belastet ist und dessen kurzer Arm 5 cm

beträgt. Wie lang mufs der längere Arm gewählt werden, wenn der Dampf im Kessel auf 152^0 erhitzt werden soll?

7. Am Gelenk einer Kniehebelpresse zieht die Kraft $K = 50$ kg. Welchen Druck D erleiden die Druckstangen, wenn sie einen Winkel von $\alpha = 30^0$, 45^0, 60^0, 90^0 bilden? Wie grofs sind dann die Reaktionen R in den Lagern und wie grofs ist die Pressung P? (Man denke sich die Druckstangen zerschnitten und die Kohäsion durch D und R, Aktion und Reaktion, ersetzt. Die entstandenen Bruchstücke müssen einzeln im Gleichgewicht stehen.)

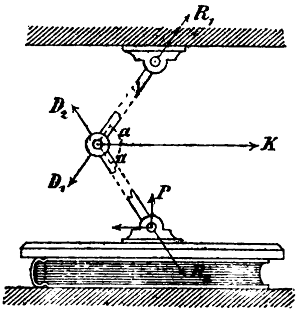


Fig. 17.

8. Ein Seil oder eine Kette $ABCD$ soll benutzt werden, um die beiden Gewichte $G = 30$t zu tragen. (Kettenbrücke.) Von den Trägern sind Seile unter 45^0 zum Erdboden hingespannt und dort befestigt. Die Horizontalprojektion der Kettenstücke sei $a = 10$ m, ihre Richtungen der Figur zu entnehmen. Wie grofs sind die Spannungen S, die vertikalen Trägerreaktionen R? Man konstruiere das Kräftepolygon. (Die Kettenstücke denke man sich zerschnitten, die Kohäsion durch die Spannungen ersetzt. Die Teile müssen einzeln im Gleichgewichte sein).

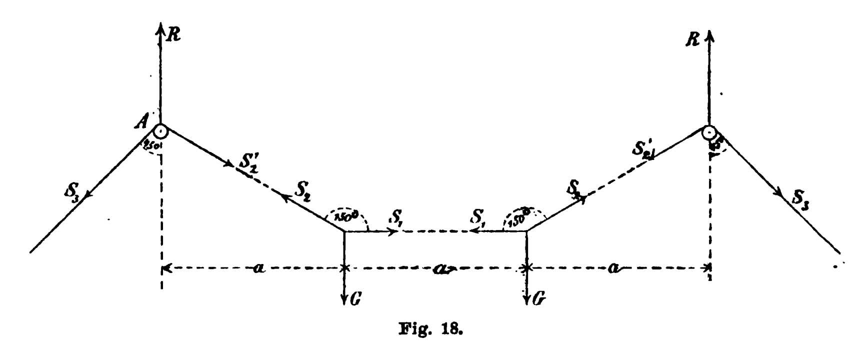


Fig. 18.

9. Über zwei Rollen AB, die in gleicher Höhe liegen, läuft ein Seil, das in der Mitte eine Last L trägt, beiderseits aber mit Gewichten G beschwert ist. Wie grofs ist α? Kann man das Seil durch Vermehrung der Gewichte G gerad spannen? Was ändert sich in der Figur, wenn die beiden Gewichte G ungleich sind, z. B. das

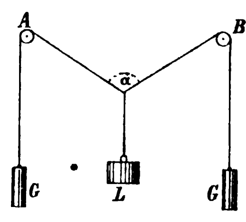


Fig. 19.

eine doppelt so grofs, als das andere? (Apparat zum Nachweis des Kräfteparallelogramms.)

10. Vier beliebige Kräfte einer Ebene setze man durch Kräfte- und Seilpolygon zusammen; man wiederhole die Konstruktion in anderer Aufeinanderfolge der Kräfte.

11. Dasselbe für vier parallele Kräfte einer Ebene.

25. Kräftepaare. Wenn die beiden Kräfte, durch welche sich beliebige Kräfte einer Ebene stets ersetzen lassen [24], sich nicht schneiden, sondern parallel laufen, so kann der Fall eintreten, dafs das Kräftesystem überhaupt nicht durch eine einzige Kraft ersetzbar ist. Sind nämlich zwei parallele Kräfte AB entgegengesetzt gleich und liegen in verschiedenen Kraftlinien, so gelingt es nicht, sie durch zwei sich schneidende Kräfte zu ersetzen. (Die Anwendung der Formeln für die Zusammensetzung paralleler Kräfte auf diesen Fall ergiebt, dafs die Resultante verschwindet und unendlich fern liegt.) Solche Paare von Kräften führte Poinsot 1804 neben den Einzelkräften als neue Elemente in die Statik des starren Körpers ein unter dem Namen Kräftepaare (couple de force). Der Abstand der beiden Kraftlinien heifst der Arm oder die Breite des Paares. Die Summe der Momente beider Kräfte hat in jedem Punkte der Ebene denselben Wert, nämlich das Produkt aus Kraft und Arm oder die Fläche des Parallelogramms, von dem die beiden Kräfte des Paares Gegenseiten sind, sobald man das Vorzeichen jenes Produktes von der Drehrichtung der Kräfte um den Momentenpunkt und das Vorzeichen der Parallelogrammfläche von der durch die Kraftrichtungen angezeigten Umlaufsrichtung abhängig macht. Diese Momentensumme beider Kräfte heifst das Moment des Paares. Den Wert Null kann dasselbe nur haben, wenn entweder die Kräfte verschwinden oder der Arm. Letzternfalls liegen die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte in derselben Kraftgeraden, stehen also im Gleichgewicht.

Kräftepaare derselben Ebene halten Gleichgewicht, wenn sie entgegengesetzt gleiche Momente haben. In dem Falle, dafs die Kraftlinien sich schneiden, führt man den Beweis, indem man die Kraft A des einen und die Kraft B des andern Paares an die eine Ecke A des Parallelogramms der Kraftlinien verlegt, und dort beide zur Resultante Γ vereinigt. Ebenso setzt man an der Gegenecke C die übrigen Kräfte A′B′ zur Re-

sultante Γ′ zusammen. Diese hat mit Γ gleiche Gröfse und entgegengesetzte Richtung wegen der Kongruenz und parallelen Lage

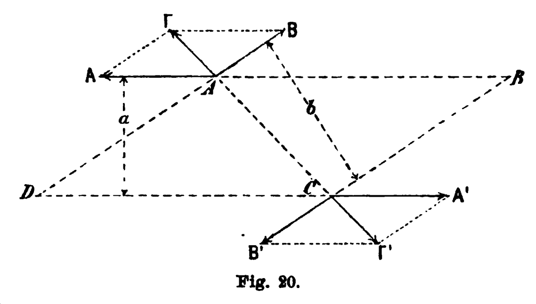


Fig. 20.

der Kräfteparallelogramme. Die Momentensumme beider Kräfte ist aber nach Voraussetzung und [24] in jedem Punkte der Ebene Null; daher herrscht Gleichgewicht. — In dem zweiten Falle, dafs die Kraftlinien beider Paare parallel laufen, setzt man nach [24] je zwei gleichgerichtete von den vier Kräften zusammen. Die beiden Resultanten, die entgegengesetzt gleich sind [24], gehören auch derselben Kraftgeraden an, was sich wieder aus der Voraussetzung ergiebt.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, dafs man jedes Kräftepaar durch ein anderes derselben Ebene ersetzen kann, wenn man das Moment des letzteren dem des gegebenen gleich macht. Beweis wie der für die Verlegung einer Kraft [22].

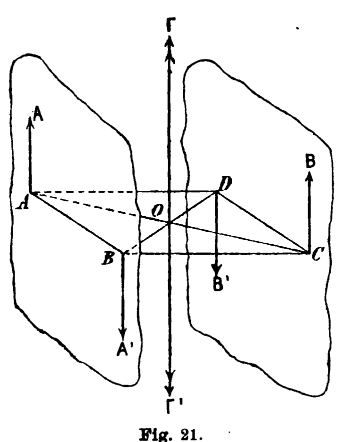


Fig. 21.

Kräftepaare paralleler Ebenen halten Gleichgewicht, wenn sie entgegengesetzt gleiche Momente haben. Man ersetzt zunächst das Paar der einen Ebene durch ein anderes, das mit dem der zweiten Ebene gleiche und parallele Kräfte besitzt, also nach Voraussetzung auch gleichen Arm. Das weitere Verfahren ist aus der Figur leicht ersichtlich.

Danach läfst sich jedes Kräftepaar durch ein anderes in einer parallelen Ebene gelegenes ersetzen, wenn man das Moment des neuen dem des gegebenen gleich macht.

(Selbstverständlich müssen beide Ebenen starr verbunden sein). Oder: ein Kräftepaar ist bestimmt durch sein Moment, seine Drehrichtung (Vorzeichen des Moments) und die Stellung seiner Ebene, denn alle Paare, die in diesen Stücken übereinstimmen, haben einerlei Wirkung.

Zwei Kräftepaare verschiedener Ebenen setzt man zusammen, indem man zunächst beide durch zwei andere Paare ihrer Ebenen ersetzt, deren Kräfte $\mathsf{AA'BB'}$ gleich und parallel sind und so gelegen, dafs eine Kraft $\mathsf{A'}$ des einen mit der entgegengesetzten $\mathsf{B'}$ des andern in die Durchschnittskante beider Ebenen fällt. Die Kräfte AB bilden dann das resultierende Paar. — Diese Methode läfst sich zur Zusammensetzung beliebig vieler Kräftepaare benutzen, wobei es vorteilhaft ist, sich des Streckenpolygons zu bedienen. Die Figur zeigt nämlich, dafs man

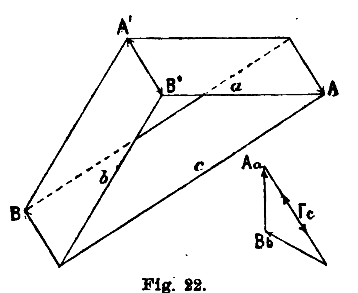


Fig. 22.

das resultierende Moment Γc zweier Paare als die Resultante zweier Strecken $\mathsf{A}a$, $\mathsf{B}b$ finden kann, welche die Momente der komponierenden Paare darstellen und zu deren Ebenen normal stehen. Momente sind Streckengröfsen und lassen sich als solche zusammensetzen und zerlegen. Die Gröfse des Moments wird durch die Länge der Strecke dargestellt, die Stellung des Paares durch die zu ihr normale Richtung der Strecke, und um dabei auch die Drehrichtung des Moments durch die Richtung der Strecke eindeutig vorzustellen, dient eine der aus der Elektrodynamik bekannten Regeln (Schwimme-, Uhrzeiger-, Korkzieherregel).

Übungen.

1. Gegeben ein Paar durch Kraft und Arm, sowie zwei parallele Gerade derselben Ebene. Gesucht die Kräfte, die in letzteren wirkend dem Paare Gleichgewicht halten.

2. Das Paar ($\mathsf{A} = \mathsf{A'} = 10\,\text{kg}$, $a = 0{,}3\,\text{m}$) durch eins zu ersetzen, dessen Kraft $\mathsf{B} = 2\,\text{kg}$ beträgt.

3. Die Paare $\mathsf{A}a$, $\mathsf{B}b$, Γc derselben Ebene sämtlich in Paare vom Arm p zu verwandeln und dann zusammenzusetzen.

4. Eine Kraft A an einen beliebigen Punkt P zu verlegen,

d. h. zu ersetzen durch eine Kraft, die gleich und parallel A ist, sowie durch P geht, und durch ein Paar.

5. Gegeben eine Kraft A und ein Paar Bb derselben Ebene. Beide durch eine Kraft zu ersetzen, die gleich und parallel A ist.

6. Gegeben zwei sich kreuzende Kräfte. Dieselben durch eine Kraft und ein Paar zu ersetzen. (Man verlege die eine Kraft an einen Punkt der zweiten Kraftlinie mittels eines Paares). Z. B. Die beiden Kräfte sind durch zwei sich kreuzende Kanten α) eines Würfels, β) eines regelmäſsigen Tetraeders dargestellt.

7. Beweis, daſs man ein beliebiges Kraftsystem immer durch eine Kraft und ein Paar ersetzen kann [Üb. 6]. Ein ebenes Kräftesystem, sowie ein System paralleler Kräfte kann man durch eine Kraft allein oder durch ein Paar allein ersetzen.

8. Das Gleichgewicht der Kräfte am Hebel mit der Reaktion läſst sich als Gleichgewicht von Kräftepaaren auffassen. Auszuführen.

9. Ein biegsames Seil ist um ein n-seitiges regelmäſsiges Prisma geschlungen, das um seine Achse drehbar ist. Die Spannungen S in den einzelnen Seilstücken, die Reaktionen R an den Kanten, sowie die Reibungen F an letzteren sind die auf das Seil wirkenden Kräfte. (Die Reibung bewirkt, daſs eine Bewegung des Seils Drehung des Prismas um seine Achse herbeiführt und umgekehrt). An der ersten Kante ist

$$(S_1 - S_2) \cos \frac{360^0}{2n} = F_1, \quad (S_1 + S_2) \sin \frac{360^0}{2n} = R_1.$$

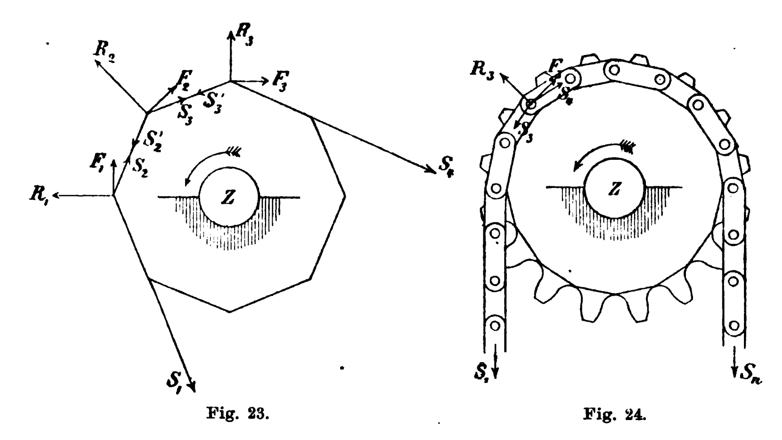


Fig. 23. Fig. 24.

Man begründe diese Formeln und füge die für die nächsten Kanten gültigen hinzu.

Dasselbe für die Kettenscheibe durchzuführen, wo unter F die Reaktionen der Zähne zu verstehen sind.

Zu beweisen, dafs (von der Reibung im Zapfenlager abgesehen) Gleichgewicht nur bei $S_1 = S_n$ ist, wo S_n die Spannung im Seilende. (Die Momentensumme der auf Prisma oder Kettenscheibe übertragenen Kräfte mufs verschwinden).

Wie grofs ist dann der Druck auf das Lager und wie gerichtet in den durch die Figuren dargestellten Fällen? (Man bedenke, dafs die Resultante aller R den Endspannungen Gleichgewicht halten mufs).

10. Statt des drehbaren Prismas [Üb. 9] denke man einen um seine horizontale Achse drehbaren Cylinder. Feste Rolle. Die Spannung in dem einen Seilstück sei S_1 und bilde den Winkel α mit dem Horizont. Wie grofs ist beim Gleichgewicht die Spannung S_n im andern Seilende, das unter β geneigt sei, wie grofs die Lagerreaktion?

11. Welche Bewegung einer festen Rolle und des übergelegten Fadens tritt ein, wenn an beiden Fadenenden α) gleiche Gewichte, β) ungleiche Gewichte hängen und das eine einen Stofs nach unten erhält? Man sieht (wie in Üb. 9 u. 10) von der Zapfenreibung ab, die übrigens durch Friktionsrollen herabgemindert werden kann (Anwendung bei der Atwood'schen Fallmaschine.)

12. Ist f der Reibungskoefficient des Seils [Üb. 9] an den Prismenkanten, $F = fR$, so folgt $S_2 = (1 - \varepsilon)S_1$. Welche Bedeutung hat ε? Man stelle diese Formeln für die einzelnen Kanten auf, berechne $S_n : S_1$ und zeige, wie rasch die Spannung bei mehrfacher Umwickelung wächst. (Rouleauschnur).

13. Die $d = 3$ dm starke Welle einer Maschine wird von einem Bremsdynamometer gefafst, welches bei $G = 20$ kg Be-

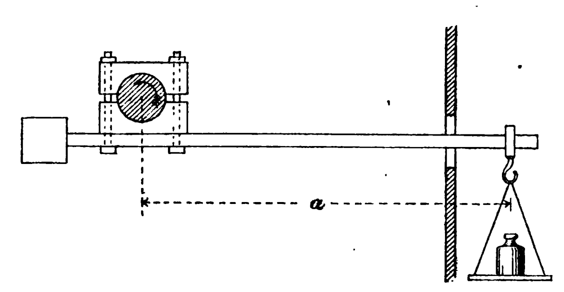


Fig. 25.

lastung am $a = 2$ m langen Hebelarm im Gleichgewicht steht. Wie grofs ist die Reibung zwischen der Welle und den Bremsklötzen, wie grofs die Arbeit der Reibung bei einem Umlauf [20. Üb. 5], wie grofs die Leistung der Maschine in Pferdestärken, wenn die Welle $n = 100$ Umläufe in der Minute macht? (1 Pferdekraft = 75 kg m : sec.)

14. Das Rad an der Welle. Auf gemeinsamer Achse sitzen zwei Rollen von den Radien R, r, deren eine durch eine Kurbel ersetzbar ist. An den beiden Seilen, die um sie gewickelt sind, wirken die Kräfte P, Q. Unter welcher Bedingung ist Gleichgewicht? Wie grofs ist die Reaktion W des Lagers, wenn die Kräfte P, Q durch Gewichte ausgeübt werden. $R = 1$ m, $r = 2$ dm, $Q = 50$ kg. Welche Bewegung kann das Wellrad nur ausführen, sobald die Kräfte im Gleichgewicht stehen? Wie grofs ist die von P geleistete, von Q verbrauchte Arbeit, wenn letztere Last um 3 m gehoben wird?

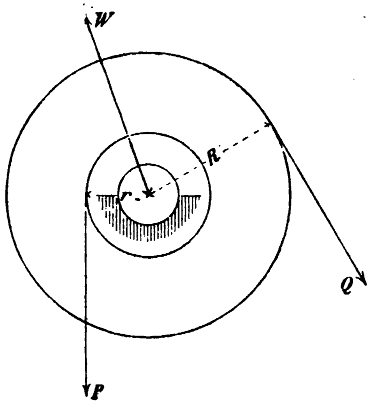


Fig. 26.

15. Zahnräder, Friktionsräder, Riemenscheiben dienen um die Bewegung einer Welle auf eine andere zu übertragen. Dazu dient bei Zahnrädern die Aktion und Reaktion zwischen den sich berührenden Zähnen, bei Friktionsrädern die Reibung zwischen

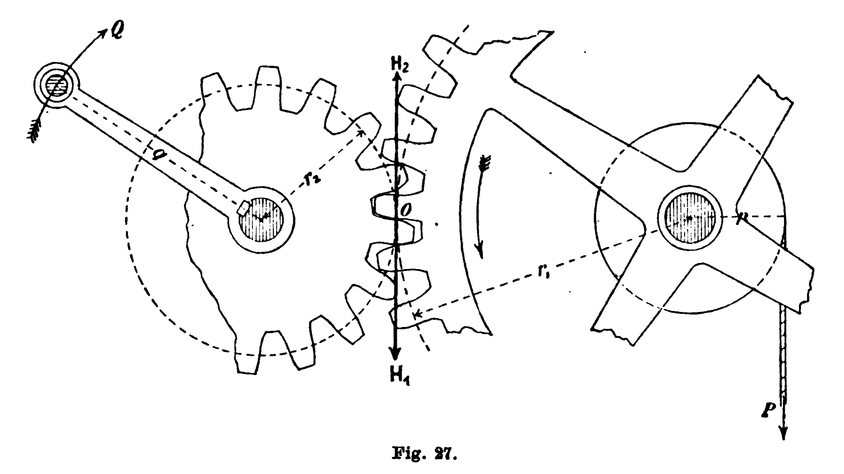


Fig. 27.

den Umflächen, bei Riemenscheiben die Reibung zwischen dem Riemen und den Umflächen der Räder. Man untersuche die Gleichgewichtsbedingung jeder Welle für sich, indem man den Einflufs des weggedachten Rades durch die Kraft ersetzt, welche die Bewegung überträgt. Z. B. sind in Fig. 27 die Gleichgewichtsbedingungen für das linke bez. rechte Rad

$$Pp - H_1 r_1 = 0, \quad H_2 r_2 - Qq = 0$$

und da $H_1 = H_2$ [14], so folgt . . . . .

$P = 1000\,\text{kg}, \quad p = 3\,\text{dm}, \quad r_1 = 7\,\text{dm}, \quad r_2 = 1\,\text{dm}, \quad q = 3\,\text{dm}.$

Wie grofs Q, ferner die Reaktion zwischen den Zähnen und in den beiden Lagern? Welche Arbeit leistet Q und verbraucht P, wenn letzteres um 1 dm gehoben wird?

16. Für die Centrifugalmaschine in der Sammlung die durch den Schnurlauf bewirkte Kraft- und Bewegungsübertragung aus den Dimensionen der Räder zu berechnen und zu beweisen, dafs kein Arbeitsgewinn stattfindet. Ebenso für die Zahnrad- und Zahnstangenübersetzung an der Luftpumpe.

17. Mittels einer Winde mit vertikaler Achse — Bodenwinde — sollen vier Männer, deren jeder mit 15 kg an einem 1 m langen Arme der Welle A drückt, eine Last von einer Tonne heben. Die Windetrommel B hat 0,3 dm Durchmesser. Wie kann man die Zahnräder wählen, welche die Kraft von A auf B übertragen, wenn man nur eine, wie wenn man zwei Übersetzungen (mittels einer „Vorgelegewelle“ C) anwenden will?

18. Auf das Seil der losen oder beweglichen Rolle wirken, wenn man die Reibung im Zapfenlager vernachlässigt, drei Kräfte: die Spannungen S der beiden Seilstücke und die von der Rollenachse getragene Last L. [Vergl. 24, Üb. 7]. Warum erfordert das Gleichgewicht gleiche und gegen die Vertikale gleich geneigte Spannungen? Ist α der Neigungswinkel der Seilstücke gegen die Vertikale, welche Beziehung findet dann zwischen S und L statt? Man beweise, dafs wenn das Seil im Gleichgewicht ist, auch Gleichgewicht der Rolle stattfindet. Dies thue man im besonderen Falle $\alpha = 0$ unter Benutzung des Momentensatzes.

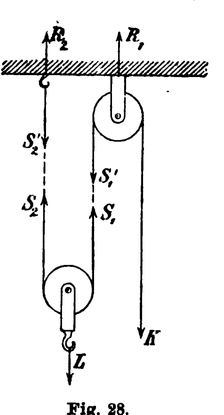


Fig. 28.

19. In den Punkten A und B ist ein Faden von der Länge l befestigt, auf dem ein schwerer Ring hingleiten kann (oder eine unten beschwerte lose Rolle). In welchem Punkte ist der Ring im Gleichgewichte, α) wenn A und B in gleicher Höhe liegen, β) im allgemeinen Falle. (Anleitung für β): Ein geometrischer Ort für die Gleichgewichtslage ist eine in vertikaler Ebene liegende Ellipse, deren Brennpunkte A und B sind).

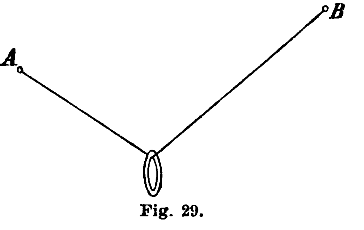


Fig. 29.

20—24. Flaschenzüge (Flasche, Kloben = Verbindung mehrerer Rollen auf gemeinsamen Zapfenträgern). Um das Verhältnis

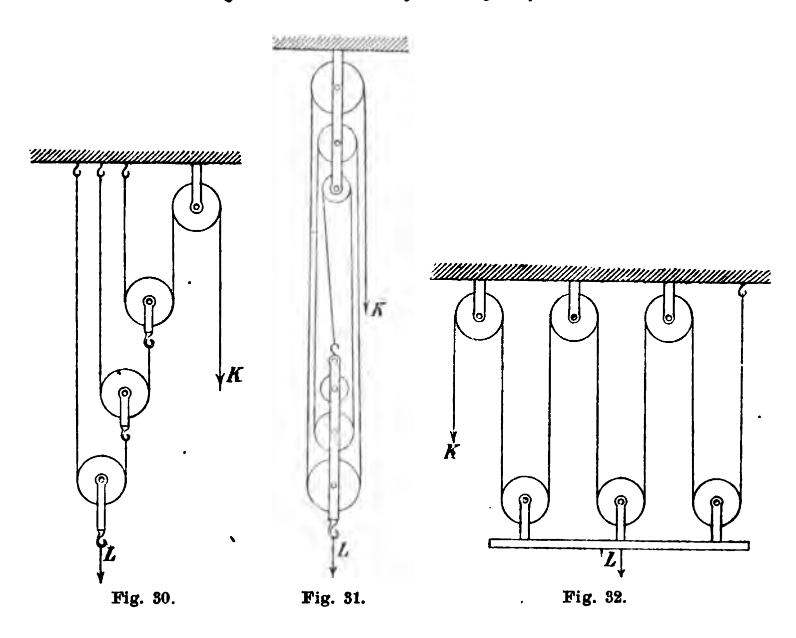


Fig. 30. Fig. 31. Fig. 32.

zwischen Kraft K und Last L zu bestimmen, denke man sich die Seile zerschnitten und die somit aufgehobene Kohäsion durch zwei Kräfte ersetzt, welche die Spannung des durchschnittenen Seilstücks bedeuten und einander gleichen [14]. Dadurch erhält man teils lose, teils feste Rollen oder Rollenverbindungen, deren Gleichgewichtsbedingungen bekannt sind. So untersuche man die abgebildeten Flaschenzüge (Figg. 28, 30, 31, 32) und die Differentialwinde Fig. 33.

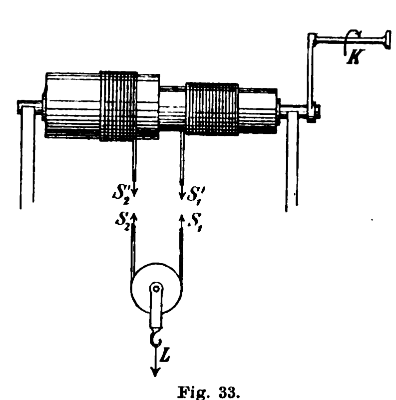


Fig. 33.

Wenn die Kräfte im Gleichgewicht stehen, bewegen sich die Seile gleichförmig. Dabei verliert das Gewicht K potentielle Energie, L gewinnt solche. Man zeige, dafs sich Gewinn und Verlust decken. Die von der Kraft gewonnene Arbeit gleicht der von der Last verbrauchten. Diese „güldene Regel der Mechanik“ gilt für alle Maschinen. — Man zeige, dafs die Summe

aller auf den Tragbalken übertragenen Seilspannungen gleich $K + L$ ist.

21. Keil. Ohne Berücksichtigung der Reibung. Beweis, dafs $K : L = AB : AC$ wie die Basis des Keils zur Länge.

22. Keil mit Berücksichtigung der Reibung. Beweis, dafs die zum Eintreiben erforderliche Kraft den Wert überschreiten mufs

$$K_1 = 2\,L\left(f \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

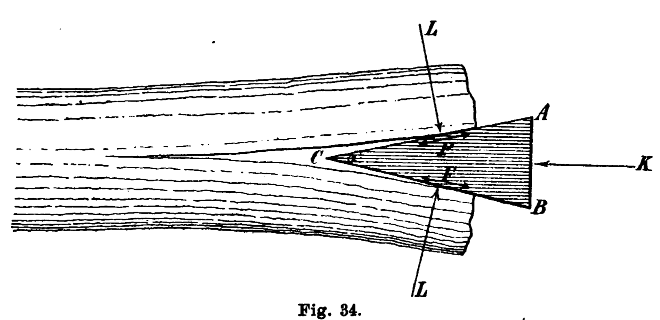


Fig. 34.

Welchen Wert mufs die zum Herausziehen nötige Kraft K_2 überschreiten? Welche Bedingung ist erforderlich, damit ein Keil „zieht", d. h. beim Aufhören der eintreibenden Kraft festsitzt und unter welcher Bedingung springt er von selbst wieder heraus?

Das Messer wirkt als Keil. Welchen Einflufs hat das Schleifen auf f und α? Warum kann man Gummi nicht gut durch Eindrücken des Messers schneiden, sondern mufs das Messer ziehend anwenden? Rasiermesser, Sichel bieten weitere Beispiele für den ziehenden Gebrauch des Messers.

23. Die Schraube. (Vgl. Fig. 35. auf folg. Seite.) Schraubenspindel + Schraubengewinde = Schraube. Hohlcylinder — Schraubengewinde = Schraubenmutter. Schraubengang. Scharf-, flachgängige Schrauben. Normal zum Gewinde wirken die Reaktionen der Mutter, die man parallel und senkrecht zur Schraubenachse zerlege. Wegen der gleichmäfsigen Verteilung der Reaktionen auf das ganze Gewinde greift die Resultante der achsialen Komponenten in der Achse an und hält der Last Gleichgewicht. Die Momentensumme der tangentialen Komponenten hält dem Momente der am Schraubenkopfe wirkenden Kraft Gleichgewicht. Man führe diese Gedanken algebraisch aus, indem man die Reaktion pro qcm Gewindefläche mit R bezeichnet und leite so den Satz her: Die Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe eines Schraubengangs zum 2π-fachen des Kraftarms.

24. Archimedische Schraube. Die Mutter wird durch den Zahn eines Rades ersetzt, über dessen Welle das Lastseil ge-

wickelt ist. Die Reaktion des Zahns gegen die Schraube hat eine Komponente, die der Kraft Gleichgewicht hält, die Aktion der

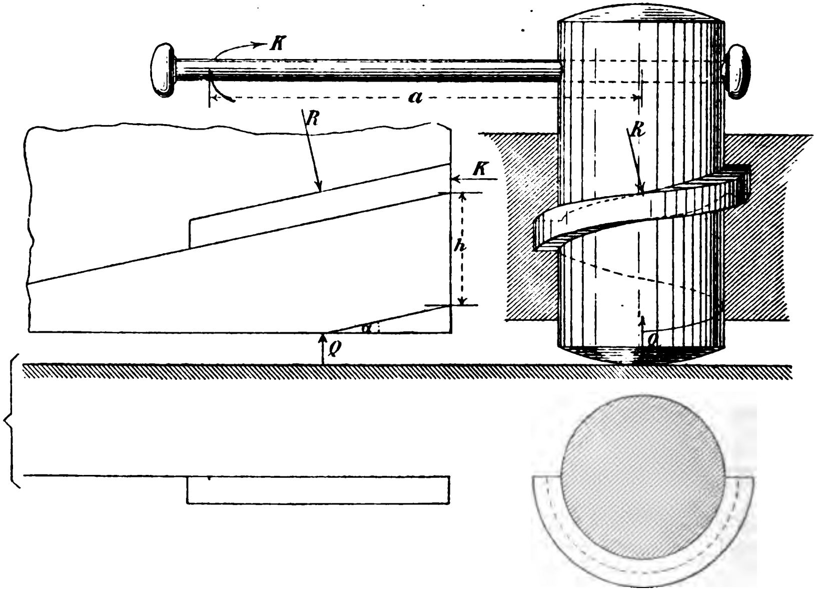


Fig. 35.

Schraube auf den Zahn hält der Last Gleichgewicht. So zerfällt die Maschine in Schraube und Wellrad. Wie verhält sich $K : L$?

Allgemeine Aufgaben über Kräftezusammensetzung.

25. Vier beliebig gewählte Kräfte P zusammenzusetzen, die in einer Ebene liegen. 1. synthetische, graphische Methode: Man konstruiere Kräfte- und Seilpolygon. 2. analytische Methode: Man zerlege die Kräfte parallel zu zwei Achsen; — verlege alle Komponenten an den Koordinatenanfang mit Hülfe von Kräftepaaren [Üb. 4]; — bilde am Koordinatenanfang die resultierende Kraft und bilde das resultierende Paar; — setze beide zusammen [Üb. 5]. Die Rechnung ist tabellarisch anzuordnen.

Gegeben seien die Koordinaten xy der Angriffspunkte, die Winkel α der Kraftlinien gegen die Kräfte, und die Gröfse der Kräfte:

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 5 \quad \alpha_1 = 45^0 \quad P_1 = 2\,\text{kg}$$
$$x_2 = 3 \quad y_2 = 3 \quad \alpha_2 = 120^0 \quad P_2 = 3\,\text{kg}$$
$$x_3 = -5 \quad y_3 = 0 \quad \alpha_3 = 225^0 \quad P_3 = 1\,\text{kg}$$
$$x_4 = 0 \quad y_4 = 0 \quad \alpha_4 = 315^0 \quad P_4 = 5\,\text{kg}$$

Man berechne die Resultante R, ihre Neigung φ gegen die X-Achse, ihren Abstand vom Koordinatenanfang, die Gleichung ihrer Kraftlinie und vergleiche mit dem Ergebnis der 1. Methode.

VI. Die Wirkungen der Schwerkraft auf starre Körper.

26. Der Schwerpunkt. — Nach dem Erdmittelpunkte werden alle Teilchen der an der Erdoberfläche befindlichen Körper wie mit unsichtbaren Fäden gezogen. Die Schwerkräfte der einzelnen Teile — der Molekeln, der Atome, streng genommen der einzelnen Punkte — eines starren Körpers können als ein System paralleler Kräfte angesehen werden, deren jede dem Gewichte des betreffenden Teilchens gleicht und nach unten, d. h. nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet ist. Die Resultante aller ist also [24] auch nach unten gerichtet und gleicht der Summe aller jener einzelnen Gewichte, d. i. dem Gesamtgewichte des Körpers. Zu ihrer vollständigen Bestimmung ist noch die Angabe eines Punktes ihrer Kraftgeraden nötig. Als solcher empfiehlt sich vor allen einer, der Mittelpunkt aller einzelnen Parallelkräfte, der Schwerpunkt des Körpers. Irgend zwei materielle Punkte A und B des Körpers liefern nämlich als Resultante ihrer Schwerkräfte A und B eine Kraft, die stets durch den Punkt S' geht, der AB innen im umgekehrten Verhältnis der Kräfte teilt, — stets, welche Lage auch immer der Körper haben möge [24]. Indem man mit der durch S' gehenden Teilresultante die Schwerkraft Γ eines beliebigen dritten Punktes C zusammensetzt, erkennt man, dafs auch die drei Kräfte $\mathsf{AB}\Gamma$ eine Resultante geben, welche immer durch einen bestimmten Punkt S'' geht, wie auch der Körper liegen möge. Durch Fortsetzung dieser Erwägung für vier und mehr Kräfte erkennt man, dafs für beliebig viele materielle Punkte sich ein Punkt finden läfst, durch welchen die Resultante aller Schwerkräfte hindurchgeht, in welcher Lage auch sich der starre Körper befinden möge. Dieser Punkt heifst Mittelpunkt der Parallelkräfte, Schwerpunkt des Körpers. Da seine Lage nur von dem Verhältnis der Einzelschwerkräfte abhängt und dieses mit dem Verhältnis der Massen übereinstimmt [10], so heifst derselbe Punkt auch Massenmittelpunkt. Für die Anfänger ist es vorteilhaft, sich immer an die Vorstellung zu halten, dafs parallele Kräfte (Strecken) zusammenzusetzen sind, also den in Rede stehenden

Punkt als Schwerpunkt aufzufassen. Jede Linie, die durch den Schwerpunkt geht, nennen wir Schwerlinie, jede solche Ebene Schwerebene des Körpers. Die vertikale Schwerlinie heifst Falllinie.

Wirkt auf einen Körper aufser der Schwere noch die Reaktion eines Fadens, an dem er hängt, so ist Gleichgewicht nur möglich, wenn diese Reaktion, also auch der Faden in der Falllinie liegt. Wie bestimmt man hiernach experimentell den Schwerpunkt? Wie grofs ist die Reaktion?

27. Der Schwerpunkt eines Punktsystems. — Theoretisch bestimmt man den Schwerpunkt eines beliebigen Systems durch Anwendung des Momentensatzes, nachdem man den Einzelkräften eine geeignete Richtung gegeben hat.

Der Schwerpunkt zweier Punkte teilt die Verbindungsstrecke im umgekehrten Verhältnis der Gewichte (oder der Massen) dieser Punkte. Zum Beweise drehe man die Kräfte senkrecht zur Verbindungsstrecke und wende den Momentensatz auf den Schwerpunkt, auch auf die beiden gegebenen Punkte an. Wie konstruiert man hiernach den Schwerpunkt zweier Punkte?

Der Schwerpunkt dreier gleichschweren Punkte ist der Durchschnittspunkt der Mittellinien des von diesen Punkten bestimmten Dreiecks. Beweis: Im Mittelpunkte C' der Dreiecksseite AB greift die Resultante $2P$ der in A und B wirkenden gleichen Schwerkräfte P an. Die Resultante aus dieser Teilresultante und der in C angreifenden Kraft P ist $3P$ und geht durch einen Punkt S, der $C'C$ im Verhältnis $1:2$ teilt. — Setzt man statt der in A und B angreifenden Kräfte zuerst die in A und C oder in B und C angreifenden zusammen, so erkennt man, dafs S Mittellinienschnittpunkt ist. — Welche geometrischen Sätze hat man dabei gefunden?

Die Methode ist ohne weiteres auch anwendbar für mehr als drei und für ungleich schwere Punkte. Sie führt z. B. zu den Sätzen: Der Schwerpunkt von vier gleichschweren Punkten liegt im Schnittpunkt der Mittelebenen des durch die vier Punkte bestimmten Tetraeders; — auch liegt er im Schnittpunkt der vier Mittellinien dieses Tetraeders, von deren jeder er ein Viertel abschneidet.

Zweckmäfsig ist es, den Schwerpunkt eines Punktsystems nach der Methode der analytischen Geometrie [9] durch seine Koordinaten zu ermitteln. Es seien drei Punkte ABC durch ihre Koordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ gegeben, das sind ihre Abstände von den beiden rechtwinkligen Koordinatenachsen OX, OY, die in der Ebene ABC gewählt wurden. Der unbekannte Schwerpunkt S der drei Punkte habe die Koordinaten $\xi \eta$. Die Punkte ABC mögen die Gewichte $\mathsf{A\,B\,\Gamma}$ haben. Dann greift in S die Resultante $\mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma$ an. Dreht man alle drei Schwerkräfte $\parallel OX$, so dreht sich auch die Resultante um den Schwerpunkt in dieselbe Richtung und der Momentensatz giebt, angewendet auf einen beliebigen Punkt in OX

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma)\,\eta = \mathsf{A} y_1 + \mathsf{B} y_2 + \Gamma y_3, \quad \eta = \frac{\mathsf{A} y_1 + \mathsf{B} y_2 + \Gamma y_3}{\mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma}.$$

Wie erhält man ξ durch entsprechendes Verfahren? — Haben die drei Punkte ABC gleiche Gewichte, so folgt

$$\xi = \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad \eta = \tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

Hat man den Schwerpunkt beliebig vieler Punkte P_1, $P_2, \ldots$ der Ebene zu bestimmen, denen die Massen m_1, $m_2, \ldots.$, die Gewichte G_1, $G_2, \ldots.$ zukommen, so ergiebt das obige Verfahren

$$(G_1 + G_2 + \ldots.)\,\eta = G_1 y_1 + G_2 y_2 + \ldots..$$

oder in verkürzter Schreibung

$$\eta \,.\, \Sigma G = \Sigma G y, \quad \eta = \frac{\Sigma G y}{\Sigma G}$$

und entsprechend findet man

$$\xi = \frac{\Sigma G x}{\Sigma G}.$$

Da $G_1 = m_1 g$, $G_2 = m_2 g$, ... [10], so hat man auch

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m} \qquad \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}.$$

Das Produkt Gy heifst **Moment des Gewichts** G **bezogen auf die Achse** OX; man versteht also darunter das Moment, das die Kraft in jedem Punkte der Geraden OX hat, wenn sie in deren Richtung um ihren Angriffspunkt gedreht worden ist. Entsprechend heifst my **Moment der Masse** m bezogen auf die X-achse.

Die Koordinatenmethode ist auch brauchbar, wenn das gegebene Punktsystem nicht einer Ebene angehört. Man mufs dann jeden Punkt durch drei räumliche Koordinaten xyz bestimmen, das sind seine Abstände von drei zu einander senkrechten Ebenen, den Koordinatenebenen, die sich in drei zu einander senkrechten Geraden, den Koordinatenachsen OX, OY, OZ schneiden. Der Abstand eines Punktes von der XY-Ebene heifst z, der von der XZ-Ebene y, der von der ZY-Ebene x. Die Schwerpunktskoordinaten seien $\xi\eta\zeta$ (entsprechend xyz).

Dreht man alle Schwerkräfte der einzelnen Punkte $\parallel OX$, so dreht sich die Resultante um den Schwerpunkt in dieselbe Richtung. Verlegt man weiter alle Kräfte, auch die Resultante, in ihren Kraftlinien an die YZ-Ebene, so liegt auch der Mittelpunkt der Einzelkräfte in dieser Ebene und hat mit dem gesuchten Schwerpunkt η und ζ gemein. Diese Koordinaten bestimmt man nun für das ebene Punktsystem der YZ-Ebene wie oben durch Drehung der Kräfte in eine OY bez. OZ parallele Richtung.

Man findet bei Benutzung der damaligen Bezeichnungen

$$\eta = \frac{\Sigma G y}{\Sigma G} = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \qquad \zeta = \frac{\Sigma G z}{\Sigma G} = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

Wie erhält man durch ein entsprechendes Verfahren ξ?

Analog wie für Achsen bezeichnet man auch die Produkte Gx, mx als Momente des Gewichts G, bez. der Masse m, in Bezug auf die Ebene OYZ.

Übungen.

1. Durch die Koordinatenmethode sowie durch Konstruktion den Schwerpunkt folgender Systeme zu ermitteln [für c) und d) Projektionslehre]:

a)
$$\begin{aligned}
x_1 &= 3, & y_1 &= 0, & m_1 &= 1\\
x_2 &= 5, & y_2 &= 7, & m_2 &= 2\\
x_3 &= 4, & y_3 &= -3, & m_3 &= 3\\
x_4 &= -2, & y_4 &= 6, & m_4 &= 2\\
x_5 &= 0, & y_5 &= -3, & m_5 &= 1
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, & y_1 &= 0, & G_1 &= 2\,\mathrm{kg}\\
x_2 &= 7, & y_2 &= -4, & G_2 &= 1\\
x_3 &= -2, & y_3 &= 8, & G_3 &= 4
\end{aligned}$$

c) $x_1 = 2, \quad y_1 = 2, \quad z_1 = 2, \quad m_1 = 1$
$x_2 = 3, \quad y_2 = 2, \quad z_2 = 5, \quad m_2 = 3$
$x_3 = 0, \quad y_3 = 7, \quad z_3 = 0, \quad m_3 = 4$

d) $x_1 = 8, \quad y_1 = -2, \quad z_1 = 5, \quad G_1 = 1\,\text{kg}$
$x_2 = 4, \quad y_2 = 3, \quad z_2 = -5, \quad G_2 = 5\,\text{kg}$
$x_3 = 0, \quad y_3 = -3, \quad z_3 = -3, \quad G_3 = 4\,\text{kg}$
$x_4 = -3, \quad y_4 = 3, \quad z_4 = +4, \quad G_4 = 3\,\text{kg}.$

2. Zu beweisen: Die Projektion des Schwerpunkts eines Punktsystems ist der Schwerpunkt der Projektion dieses Systems.

3. Ist S der Schwerpunkt der Punkte ABC, deren Massen $\alpha\beta\gamma$, so ist $\triangle SAB : SBC : SCA : ABC = \gamma : \beta : \alpha : (\alpha + \beta + \gamma)$. Beweis.

4. Ist S der Schwerpunkt der Eckpunkte $ABCD$ eines Tetraeders und sind $\alpha\beta\gamma\delta$ deren Massen, so ist:
$SABC : SBCD : SCDA : SDAB : ABCD = \delta : \alpha : \beta : \gamma : (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$.
Beweis.

5. Die Summe der Quadrate der Abstände eines Punktes von den Punkten eines gegebenen Systems ist am kleinsten, wenn jener Punkt der Schwerpunkt des Systems ist und sie ist gleich für alle Punkte eines Kreises um den Schwerpunkt. Beweis zunächst für 2, 3 Punkte.

28. Der Schwerpunkt eines Körpers. — Wenn man alle Punkte eines Systems so zu Paaren ordnen kann, dafs die Schwerpunkte sämmtlicher Paare einer Ebene oder einer Geraden angehören, so liegt auch der Schwerpunkt des ganzen Systems in dieser Ebene oder dieser Geraden. Das gilt unabhängig von der Anzahl der Punkte, gilt also auch für Punkte, die stetig einen Raum oder eine Fläche oder eine Linie erfüllen. Hierdurch ergiebt sich der Schwerpunkt der homogenen Strecke, der homogenen Dreiecksfläche (durch drei Schwerlinien, er liegt um $\frac{1}{3}$ der Höhe über der Basis), des homogenen Tetraedervolums (durch drei Schwerebenen oder vier Schwerlinien, er liegt um $\frac{1}{4}$ der Höhe über der Basis), aller homogenen regelmäfsigen Flächen und Körper, aller homogenen regelmäfsigen geraden Prismen, des homogenen Parallelogramms und Parallelepipeds, des homogenen geraden Kreiscylinders. Für viele andere homogene Figuren ergiebt sich durch obigen Satz wenigstens eine Schwerlinie oder eine, auch zwei Schwerebenen. Beispiele. Symmetrieachsen und -ebenen homogener Körper sind zugleich Schwerlinien und -ebenen derselben.

Als homogen bezeichnen wir dabei einen Körper, der gleiche Masse im gleichen Raumteil enthält, wie klein man auch die Volumteile wählen möge. Die Masse der Volumeinheit nennt man gewöhnlich Dichtigkeit, das Gewicht der Volumeinheit oft specifisches Gewicht. Dann kann man als homogen einen Körper bezeichnen, der in allen Teilen gleiche Dichtigkeit oder gleiches specifisches Gewicht hat, wie klein man die Teile auch wählen möge. Abweichende Bedeutungen der Worte Dichtigkeit, specifisches Gewicht anzugeben. Verschiedenen Sinn hat z. B. das Wort specifisches Gewicht in den identischen Sätzen: Ein Körper hat das sp. Gew. 2; — er hat das sp. Gew. $2\,g : cm^3$.

Genügt obiger Satz nicht zur Ermittelung des Schwerpunkts eines Körpers, so zerlegt man den Körper in Stücke, für welche der Satz genügt und setzt die Schwerkräfte der einzelnen Stücke nach [27] zusammen.

Den Schwerpunkt eines Stückes von einem homogenen regelmäfsigen Vieleck findet man z. B. folgendermafsen: Die Figur hat eine Symmetrieachse OY, die durch den Mittelpunkt des dem Vieleck einbeschriebenen Kreises und bei ungerader Seitenzahl durch die Mitte der mittelsten Seite, bei gerader Seitenzahl durch die mittelste Ecke geht. Um nun die Lage des Schwerpunkts S auf OY zu bestimmen, denke man sich das Gewicht jeder Vielecksseite normal zu OY gerichtet. Die erste dieser Kräfte hat, wenn mit γ das Gewicht der Längeneinheit bezeichnet wird, die Gröfse $\gamma \,.\, AB$ und greift in der Mitte S_1 von AB an, die zweite hat $\gamma \,.\, BC$ zur Gröfse und S_2, die Mitte von BC, zum Angriffspunkt. Das Moment aller Kräfte bez. O ist daher

$$\gamma \,.\, AB \,.\, S_1S_1' + \gamma \,.\, BC \,.\, S_2S_2' + \ldots .$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABM_1 und S_1OS_1', ferner BCM_2 und S_2OS_2' u. s. w. folgt für das obige Moment auch der Wert

$$\gamma \,.\, A'B' \,.\, S_1O + \gamma \,.\, B'C' \,.\, S_2O + \ldots .$$
$$= \gamma \,.\, r \,.\, s$$

wo r den Radius des dem Vieleck einbeschriebenen Kreises, s die Verbindungsstrecke AH des Anfangs- und Endpunkts bezeichnet. Die im gesuchten Schwerpunkte S angreifende Resultante aller Schwerkräfte hat die Gröfse $\gamma(AB + BC + \ldots .) = \gamma \,.\, l$ und

ist normal OY. Ihr Moment in O ist daher $y \cdot l \cdot SO$. Da es dem Momente der Einzelkräfte gleichen mufs, folgt

$$SO = \frac{rs}{l}.$$

Die Formel ist entwickelt worden ohne Rücksicht auf die Zahl der Polygonseiten, gilt also bei beliebig wachsender Zahl derselben, daher auch für den Kreisbogen vom Radius r, der Länge l und der Sehne s.

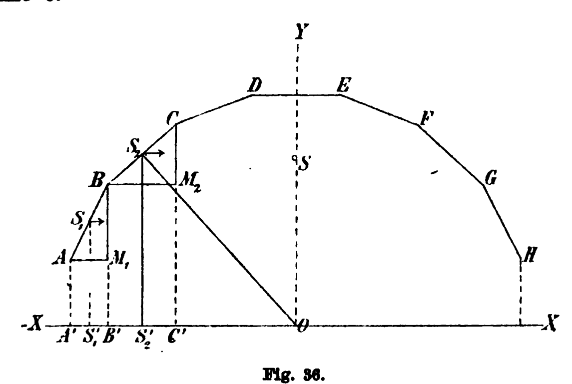


Fig. 36.

Die Schlufsweise wiederholt sich, wenn man den Schwerpunkt eines homogenen regelmäfsigen Polygonausschnittes

$$OABC \ldots HO$$

bez. den eines Kreisausschnittes ermittelt. Die Schwerpunkte der einzelnen Dreiecksflächen ABO, BCO, ... liegen auf einem Kreise um O, dessen Radius $\frac{2}{3}r$ ist, und die Gewichte dieser Dreiecksflächen sind $\frac{1}{2}\varepsilon \cdot r \cdot AB$, $\frac{1}{2}\varepsilon \cdot r \cdot BC$, ... wo ε das Gewicht der Flächeneinheit bedeutet. Die Momentensumme der Dreiecksflächen wird also

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon r AB \cdot \frac{2}{3} S_1S_1' + \frac{1}{2}\,\varepsilon r BC \cdot \frac{2}{3} S_2S_2' + \ldots = \frac{1}{2}\varepsilon r \cdot \frac{2}{3} rs$$

während die Resultante aller Schwerkräfte ist.

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon r (AB + BC + \ldots) = \frac{1}{2}\varepsilon r \cdot l.$$

Da das Moment dieser Resultante jener Momentensumme gleichen mufs, so folgt, dafs der Schwerpunktsabstand des Sektors von OX gleich $\frac{2}{3}\,OS = \frac{2}{3}$ mal dem Schwerpunktsabstande des Bogens ist.

Der Schwerpunkt einer homogenen Kugelzone liegt auf der Symmetrieachse und halbiert die Höhe. Teilt man nämlich die Höhe in n gleiche Teile und legt Ebenen parallel zu den Begrenzungskreisen der Zone durch die Teilpunkte, so zerfällt die Zone in n gleiche Zonen, deren jede ihren Schwerpunkt auf der Symmetrieachse hat. Nun lasse man n unbegrenzt zunehmen.

Um den Schwerpunkt eines homogenen Kugelsektors zu finden, wähle man beliebig viele, über der Kugelkappe desselben verteilte Punkte, deren je drei mit dem Kugelmittelpunkte eine dreiseitige Pyramide bestimmen. Diese Pyramiden erfüllen das Volumen des Kugelsektors um so vollständiger, je gröſser die Zahl der auf der Kappe verteilten Punkte ist. Die Schwerpunkte dieser Pyramiden erfüllen ebenfalls je gröſser diese Zahl ist, um so vollständiger und gleichmäſsiger eine kleinere Kugelkappe, deren Radius $^3/_4$ vom Radius der begrenzenden Kappe ist und die mit letzterer konzentrisch liegt. Der Schwerpunkt der kleinen Kugelkappe ist der Schwerpunkt des Kugelsektors.

Übungen.

Schwerpunktsbestimmungen.

1. Man bestimme den Schwerpunkt einer homogenen Fläche, die aus Dreiecken, Parallelogrammen und Kreisstücken zusammensetzbar ist, aus den Schwerpunkten ihrer Teile α) durch die Koordinatenmethode, sowie β) durch Konstruktion. Dann schneide man aus Kartenpapier die Fläche aus und bestimme γ) den Schwerpunkt durch Versuche. Z. B. bestehe die Fläche aus einem Quadrat (von dem man zwei Seiten als X- und Y-Achse wähle) von der Seite $a = 4$ cm und zwei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken, die zwei anstossende Quadratseiten zu Hypotenusen haben. Oder: Die Fläche sei ein Halbkreis, Quadrant u. s. w.

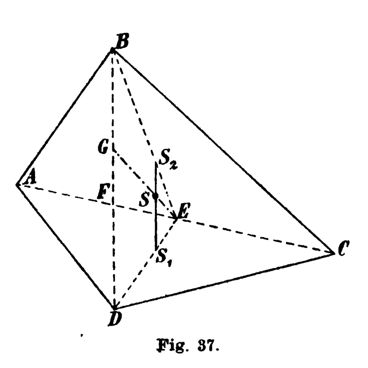


Fig. 37.

2. Den Schwerpunkt S einer homogenen Vierecksfläche zu ermitteln. Man bestimme zwei Schwerlinien. Oder: Die Verbindungslinie der Schwerpunkte S_1, S_2 der Dreiecke ACD und ABC ist Schwerlinie. Man zeige, daſs $S_1 S_2 \parallel DB$. $S_1 S_2$ muſs durch S im Verhältnis $ACD : ABC$

geteilt werden. Dies geschieht, wenn man EG zieht, nachdem $BG = DF$ gemacht wurde. Beweis.

3. Der Schwerpunkt eines Paralleltrapezes liegt auf der Verbindungslinie EF der Mitten der parallelen Seiten. Warum? Er liegt im Abstande $\frac{1}{3}h(a + 2b) : (a + b)$ von der Seite AB, wenn $a = AB$, $b = CD$, h die Höhe des Trapézes. Beweis

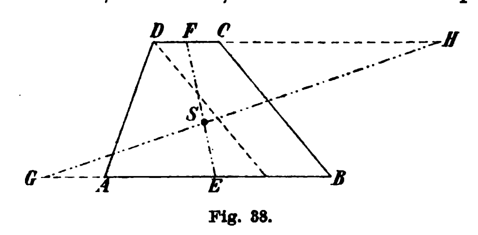


Fig. 38.

durch Zerlegung des Trapezes mittels einer Diagonale und Ermittelung der Koordinaten der Schwerpunkte beider Teilstücke.

Wie verhält sich daher $ES : SF$? Macht man $CH = a$, $AG = b$, so ist GH Schwerlinie. Beweis. Zieht man durch D eine Parallele zu CB, so geht GH durch die Schwerpunkte der entstandenen Teile des Trapezes.

4. Statt den Körper, dessen Schwerpunkt gesucht werden soll, in Stücke von bekanntem Schwerpunkt zu zerlegen, ist es in manchen Fällen zweckmäfsig ihm solche Stücke zuzufügen, dafs man einen Körper von bekanntem Schwerpunkt erhält. Indem man dann Kräfte anbringt, die den Gewichten der zugefügten Stücke Gleichgewicht halten, verbessert man den durch die Zufügung entstandenen Fehler. Analytisch kann man die Sache auch so auffassen, dafs man in den Gleichungen für die Schwerpunktskoordinaten des durch die Zufügung entstandenen Körpers die des gegebenen Körpers als Unbekannte betrachtet.

Man bestimme hiernach, wie in Üb. 1 verfahrend, den Schwerpunkt eines Kreissegmentes, oder der Restfläche, die man erhält, wenn man über einer Quadratseite nach innen einen Halbkreis schlägt, u. s. w.

5. Wie Üb. 3, doch soll das Paralleltrapez als Differenz der Dreiecke aufgefafst werden, welche die nicht parallelen Seiten zu gemeinsamen Schenkeln haben.

6. Den Schwerpunkt einer α) Γ-, β) T-, γ) ⌶-, δ) ⊏-förmigen Fläche zu ermitteln aus den Dimensionen der Rechtecke, aus welchen die Fläche zusammengesetzt ist. Die Rechtecke sind sämtlich gleich breit.

7. Schwerpunkt dreier homogener Strecken, welche die Hälfte des Umfangs eines regelmäfsigen Sechsecks bilden.

8. Schwerpunkt dreier homogener Strecken, welche ein Dreieck bilden (Dreiecksumfang). Aufl.: Mittelpunkt des Kreises, der dem Dreieck der Seitenmitten des gegebenen Dreiecks einbeschrieben ist.

9. Schwerpunkt eines Kreisbogens, wenn Radius $r = 2$ dm und Centriwinkel $\alpha = 30^0$ gegeben ist.

10. Schwerpunkt des homogenen Umfangs eines Kreissegments, dessen Radius $r = 1$ dm, dessen Centriwinkel $\alpha = 240^0$ beträgt.

10^b. Wie mufs sich das Gewicht der Längeneinheit des Bogens zu dem der Sehne verhalten, damit der Schwerpunkt der Begrenzung des Segmentes in den Kreismittelpunkt fällt?

11. Schwerpunkt von fünf Seiten eines Würfels. (Auch ein Modell aus Kartenpapier herzustellen zur experimentellen Prüfung).

12. Schwerpunkt der Oberfläche eines Tetraeders. Aufl. analog wie Üb. 8.

13. Schwerpunkt der Halbkugeloberfläche.

13^b. Schwerpunkt der α) Kugelquadranten-, β) Kugeloktantenoberfläche. (Man füge dem Quadranten einen zweiten zu, der ihn zur Halbkugel ergänzt.)

14 a. Schwerpunkt der Pyramide, des Kegels.

14 b. Schwerpunkt des Pyramiden- und Kegelstumpfes.

14 c. Aus dem Satze des Archimedes über die Schnitte durch eine Halbkugel, einen Cylinder und einen Kegel von bestimmter Gröfse und Lage, folgt, dafs in Bezug auf eine Endfläche der Archimedischen Figur das Moment des Halbkugelschnittes gleich der Differenz der Momente des Cylinder- und des Kegelschnittes ist. Man leite hieraus die Lage des Schwerpunkts α) der Halbkugel β) einer Kugelschicht ab.

Anwendungen.

15. Die potentielle Energie eines Körpers, d. i. die Summe der p. E. seiner Punkte, ist dieselbe wie die des Schwerpunktes, wenn in diesem die Gesamtmasse des Körpers vereinigt gedacht wird. Beweis. In welcher Lage eines drehbaren Körpers ist die potentielle Energie ein Maximum, in welcher ein Minimum? Wie mufs die Drehachse gewählt sein, damit die potentielle E. für alle Lagen des Körpers konstant ist? [Vergl. 29.]

16. Ein (parallelepipedisches) Brett liegt schräg an einer 2 m hohen Mauer, so dafs 1 m Brettlänge überragt, während das Brett überhaupt 5 m lang ist. Welche Kraft mufs man am obern Brettende anwenden um das Brett über die Mauer zu kippen, welche, wenn man 2 m, bez. 3 m der Brettlänge herübergezogen hat? Gewicht des Brettes 20 kg.

17. Welche Korrektur mufs man an dem Hebelgesetze wegen des Eigengewichtes des Hebels anbringen?

18. Hebelbeweis des Archimedes in der von Galilei gegebenen Form. Axiom: Gleiche Gewichte in gleichem Abstand vom Drehpunkt halten Gleichgewicht. — Der Hebel AB sei mit dem homogenen Stab PQ von 70 cm Länge belastet. Er ist

in der Mitte unterstützt und trägt die Last durch vier Bänder **bei** P, M, M, Q wo $PM = 20$ cm. Zwischen den Bändern **bei** M werde der Stab PQ zerschnitten und nun die Stücke **durch** je ein Band in ihren Mitten S und T getragen. Dem Axiome

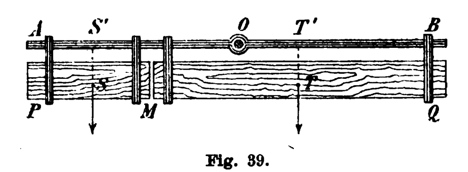


Fig. 39.

zufolge ist immer noch Gleichgewicht. Es verhalten sich aber die Abstände, $S'O$ und $T'O$ der Bänder umgekehrt wie die in ihnen ziehenden Belastungen PM und QM, im Beispiel wie $5:2$. Dasselbe allgemein zu beweisen: $AB = l$, $PM = x$, $MQ = y$.

19. Man wiederhole [25 Üb. 16—21] mit Berücksichtigung des Gewichts G jeder homogenen Rolle.

20. Unter einen Steinblock schiebt man das Ende einer Brechstange oder eines Hebebaums von 3 m Länge. In 15 cm Entfernung vom untergeschobenen Ende ruht die Stange auf einem festen Lager (Kieselstein) auf. Welche Last vermag man so mit 15 kg Kraft zu heben, wenn die homogene Stange selbst 15 kg wiegt?

21. Wie hat man die Kräfte zu bestimmen, die nötig sind, um einen Schubkarren von bekanntem Gewicht und bekannter Belastung α) zu heben, β) in Bewegung zu setzen, γ) in Bewegung zu erhalten?

22 u. 23. Guldinsche Regel gefunden von Pappus: Rotiert eine ebene Figur um eine sie nicht schneidende Achse, so ist das Volumen des Rotationskörpers gleich dem Produkte aus dem Flächeninhalte der Figur und dem Wege des Flächenschwerpunkts; — ferner ist die Oberfläche des Rotationskörpers gleich dem Produkte aus dem Umfange der Figur und dem Wege seines Schwerpunkts.

Man beweise den ersten Satz für folgende Fälle:

a) Ein Rechteck rotiert um eine Seite.

b) Ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete.

c) Ein Paralleltrapez mit zwei rechten Winkeln um die zu den Parallelen senkrechte Seite.

d) Ein Polygon rotiert. Man stelle dessen Fläche als algebraische Summe von Trapezen dar.

Die Eckenzahl des Polygons ist einflufslos, daher gilt der Satz auch für krummlinig begrenzte Flächen, was man für den Kugelabschnitt bestätige.

Den zweiten Guldinschen Satz beweise man für folgende Fälle:

a) Eine Strecke rotiert um eine zu ihr senkrechte Achse.

b) Um eine zu ihr parallele Achse.

c) Um eine durch einen ihrer Endpunkte gehende Achse.

d) Um eine sie nicht treffende Achse derselben Ebene.

e) Zwei zusammenstossende Strecken rotieren um eine sie nicht schneidende Achse ihrer Ebene.

f) Ein beliebiges Polygon rotiert.

24. Man bestätige die Guldinschen Sätze für folgenden Rotationskörper: Kugel, Halbkugel, Kugelabschnitt, Kugelschicht.

25. Oberfläche und Volum eines Ringes zu bestimmen, der durch Rotation eines Kreises um eine ihn nicht schneidende Achse entsteht.

26. Dasselbe für Rotation eines Kreisabschnitts um eine der Sehne parallele Achse. (Fingerring.)

27. Den Satz des Archimedes über die Volumina von Halbkugel, Cylinder und Kegel abzuleiten aus der Guldinschen Regel.

29. Unterstützung eines Körpers durch Befestigung eines oder zweier Punkte, Aufhängung. — Verhindert man die Bewegbarkeit eines Punktes des starren Körpers, so kann letzterer zwar noch unendlich viele Lagen einnehmen, jedoch nicht mehr jede beliebige Lage. Seine Bewegungsfreiheit ist derart beschränkt, dafs jedem seiner Punkte eine Kugelfläche angewiesen ist, die dieser Punkt nicht mehr verlassen kann. — Sind zwei Punkte des starren Körpers unbeweglich, so ist die Bewegungsfreiheit eine noch beschränktere, jedem Punkte ist eine Kreislinie angewiesen, der Körper kann nur noch rotieren um die durch die festgehaltenen Punkte gehende Achse. — Die Befestigung des Körpers in drei Punkten, welche nicht einer Geraden angehören, nimmt dem Körper jede Freiheit der Bewegung. — In den drei erwähnten Fällen war jedem Punkte ein geometrisches Gebilde von 2, bez. 1 oder 0 Dimensionen als Gebiet für seine Bewegbarkeit angewiesen. Man bezeichnet dementsprechend die Bewegungsfreiheit des Körpers selbst als eine von der zweiten, bez. ersten oder nullten Stufe.

Nach Erörterung der Kinematik des in einzelnen Punkten festgehaltenen Körpers, wenden wir uns zur Statik desselben.

Ist der Körper um einen Punkt drehbar, so können die auf ihn wirkenden Kräfte sogleich zu zweien zusammengefafst werden, zu dem im Schwerpunkt S angreifenden Gewicht G und der im Unterstützungspunkte U wirkenden Reaktion R, die zunächst nach Gröfse und Richtung unbekannt ist. Diese Kräfte halten Gleich-

gewicht nur, wenn sie in derselben Geraden entgegengesetzt gerichtet wirken, woraus R nach Gröfse und Richtung folgt. Not-

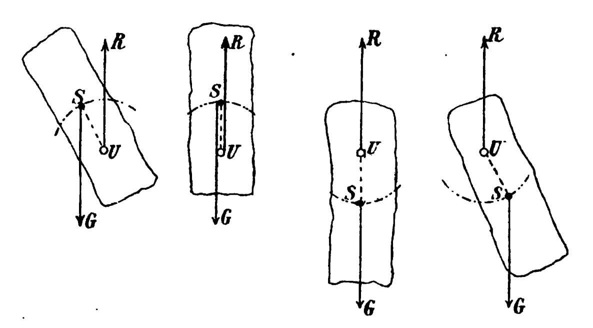


Fig. 40.

wendig mufs beim Gleichgewicht SU vertikal sein, was bei zwei Lagen von S zutrifft, wenn S nämlich vertikal über oder unter U liegt.

Die beiden Gleichgewichtslagen haben verschiedene Eigenschaften. Bringt man nämlich den Körper aus der Gleichgewichtslage, wo S über U liegt, in eine davon beliebig wenig abweichende Lage, und läfst ihn dann los, ohne ihm Energie mitzuteilen, so kann der Körper nie wieder von selbst in die verlassene Gleichgewichtslage zurückkehren, weil dabei seine Energie einen Zuwachs erleiden würde. Nie kann ja der Schwerpunkt von selbst eine höhere Ruhelage annehmen, als er hatte [28 Üb. 15]. Diese Gleichgewichtslage heifst labil (labi, labilis). In ihr ist die potentielle Energie ein Maximum. Bei jeder Störung derselben senkt sich der Schwerpunkt.

Eine Störung der zweiten Gleichgewichtslage, bei welcher S unter U liegt, hat Pendelbewegung [vergl. 33] um die verlassene Lage zur Folge, indem sich der durch die Störung erteilte Zuwachs an potentieller Energie in kinetische verwandelt. Diese Gleichgewichtslage heifst stabil (stare, stabilis). Für sie ist die potentielle Energie des Körpers ein Minimum. Stört man sie, so hebt man den Schwerpunkt.

Fällt S mit U zusammen, so ist der Körper in jeder Lage im Gleichgewicht, er ist astatisch aufgehängt, sein Gleichgewicht indifferent.

Stört man die indifferente Lage so bleibt Gleichgewicht der Schwerkraft und der Reaktion. Stört man die stabile Lage, so

bilden beide Kräfte ein zurückdrehendes Paar, stört man die labile Lage, so entsteht ein weiter fortdrehendes Paar.

Bei Unterstützung zweier Punkte lassen sich die wirkenden Kräfte zunächst zu dreien zusammenfassen, zu dem im Schwerpunkte angreifenden Gewichte und den beiden in den unterstützten Punkten wirkenden Reaktionen. Gleichgewicht ist nur möglich, wenn diese drei Kräfte einer Vertikalebene angehören. Die Reaktionen lassen sich einzeln nur dann bestimmen, wenn noch die Richtungen bekannt sind, in denen sie wirken.

30. Unterstützung eines Körpers durch eine Unterlage. — Liegt ein Körper auf einer Ebene, so hat er aufser der Freiheit, sich gänzlich über die Ebene zu erheben, und der, sich auf der Ebene hinzubewegen noch die Freiheit, sich um gewisse Gerade der Ebene zu drehen, welche wenigstens durch je einen

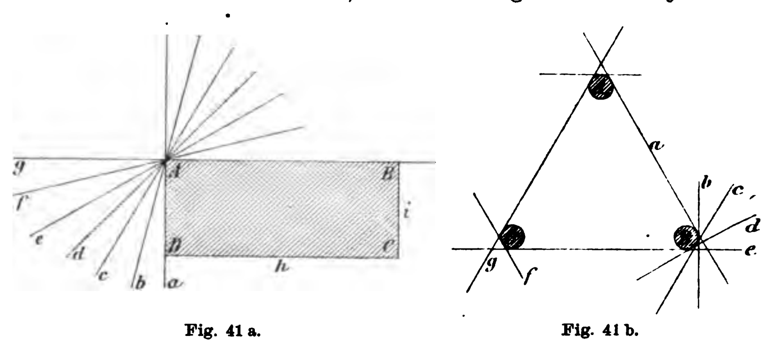


Fig. 41 a. Fig. 41 b.

seiner Stützpunkte hindurchgehen. Diese Geraden heifsen die Kippkanten des Körpers, die von ihnen umhüllte Fläche seine Stützfläche. Fig. 41 a. stellt Kippkanten eines Parallelepipeds von rechteckiger Basis dar, Fig. 41 b. Kippkanten eines Bänkchens mit drei cylindrischen Füfsen. In besonderen Fällen kann die Stützfläche zu einer Geraden oder einem Punkte zusammenschrumpfen.

Die auf den unterstützten Körper wirkenden Kräfte lassen sich zunächst zu zweien zusammenfassen: die Schwerkräfte aller einzelnen Punkte haben zur Resultante das im Schwerpunkt angreifende Gewicht des Körpers; die Reaktionen in den einzelnen Stützpunkten sind sämtlich normal zur Unterstützungsfläche nach oben gerichtet (einzelne können verschwinden), haben daher eine Re-

sultante, die durch einen Punkt innerhalb der Stützfläche geht, im äufsersten Falle durch einen Punkt in der Begrenzung der Stützfläche. Daher kann Gleichgewicht nur stattfinden, wenn der Schwerpunkt über der Stützfläche liegt. Sobald der Schwerpunkt eine solche Lage angenommen hat, lassen sich stets die Reaktionen so wählen, dafs sie der Schwere Gleichgewicht halten.

Die besonderen Eigenschaften einer Gleichgewichtslage beurteile man in folgender Weise:

Stört man irgendwie die Gleichgewichtslage, so hebt sich entweder der Schwerpunkt, oder er senkt sich oder er bleibt im Niveau. Fig. 42. Das Gleichgewicht verhält sich gegen die Störung stabil, labil, indifferent [29].

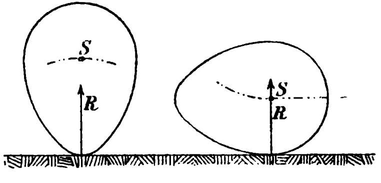


Fig. 42.

Insbesondere ist stets das Gleichgewicht stabil, wenn der Körper eine eigentliche Stützfläche hat (nicht nur in einer Geraden oder einem Punkte auflagert) und der Schwerpunkt über dem Inneren dieser Stützfläche liegt. Beweis? Labil ist stets das Gleichgewicht auf einer Kante oder Spitze, über welcher der Schwerpunkt liegt.

Verschiedene Körper stehen verschieden sicher, ebenso derselbe Körper, wenn verschiedene seiner Flächen auf der Unterlage aufliegen; auch auf derselben Fläche widersteht der Körper dem Umwerfen um verschiedene Kanten in verschiedener Weise. Diese Sicherheit des Gleichgewichts, Standfestigkeit oder Stabilität gegen eine Störung des Gleichgewichts bemifst man, wenn eine eigentliche Stützfläche vorhanden ist, auf folgende Art. Um den Körper in einer wenig gekippten Lage zu erhalten, ist ein Paar erforderlich, welches dem Paare Gleichgewicht hält, das aus dem Gewichte des Körpers und der Reaktion in der Kippkante gebildet wird. Das Moment dieses Paares ist am gröfsten, wenn der Körper eben die Gleichgewichtslage verläfst. Dieser

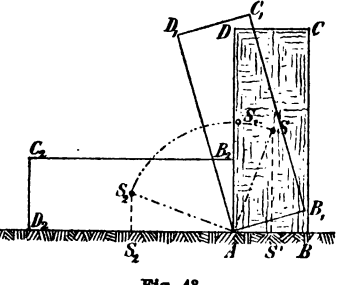


Fig. 43.

gröfste Wert mufs überschritten werden, wenn der Körper kippen soll. Er dient als Mafs der Stabilität und man hat

Stabilität = Gewicht $\times$ Abstand der Falllinie und Kippkante.

Eine zweite Art, die Stabilität zu beurteilen, besteht darin, dafs man die Arbeit angiebt, welche erforderlich ist, um den Körper aus der Gleichgewichtslage durch Kippen um eine bestimmte Kante in labile Lage zu bringen. Diese Arbeit ist die Differenz der potentiellen Energien des Körpers in beiden Lagen. Sie mufs überschritten werden, wenn man den Körper umstürzen will. Diesen Arbeitsaufwand nennt man das dynamische Mafs der Stabilität, dagegen heifst das oben angegebene Moment der Schwere das statische Mafs der Stabilität.

Übungen.

1. Man benutze eine Karte, deren Schwerpunkt bestimmt wurde [28, Üb. 1], um die drei verschiedenen Gleichgewichtslagen zu zeigen, indem man die Karte an geeigneten Stellen durchsticht.

2. Ein rechtwinkliges Parallelepiped (Ziegelstein Fig. 43) steht mit der Basis, deren Kanten die Längen $a = 12$ cm, $b = 6{,}5$ cm haben, auf horizontaler Unterlage. Seine Höhe h beträgt 25 cm, sein specifisches Gewicht $s = 2$. Wie grofs ist seine Stabilität gegen Umkippen α) um a, β) um b nach statischem wie dynamischem Mafse. γ) Welche anderen stabilen Lagen hat der Stein und wie grofs ist für diese die Stabilität? Wo ist der Körper in labilem Gleichgewicht?

3. Dasselbe rechtwinklige Parallelepiped steht auf horizontaler Unterlage. Diese wird mehr und mehr geneigt. Bei welchem Neigungswinkel α kippt der Körper um? Welche Bedingung mufs allgemein stattfinden, damit der Körper eher nach unten umkippt, als nach unten gleitet? Reibungskoeff. $= f$. Das Resultat durch Versuche zu bestätigen.

4. Aus den Mafsen für die Stabilität die praktischen Regeln zu begründen, welche für die Herstellung von Stativen, Lampenfüfsen u. dergl. gelten, ferner für das Beladen der Wagen.

5. Warum kann man nicht auf dem rechten Beine allein stehen, wenn man mit der rechten Seite dicht an der Wand steht? — Warum kann man nicht von einem Stuhle sich erheben, wenn die Füfse ein Stück vor dem Stuhle aufstehen?

6. Die Gesetze der stabilen Unterstützung am menschlichen (und tierischen) Körper zu erläutern. Gehen, Stehen auf den Fufsspitzen, einem Fufse, mit gespreizten Beinen, bei Turnübungen, beim Lastentragen.

7. Ein homogener Körper besteht aus einem geraden Kreiscylinder und einer Halbkugel, die über der einen Endfläche des Cylinders konstruiert ist. In welchen Lagen ist der Körper auf horizontaler Unterlage im Gleichgewicht und welcher Art sind die Gleichgewichtslagen? Dabei sind die drei Fälle zu unterscheiden, daſs die Höhe h des Cylinders $\gtreqless$ als $\frac{3}{4}$ seines Radius ist. (Stehaufchen.)

8. An einem rechteckigen geraden Prisma (Breite b, Höhe h, Länge l, spec. Gew. s) auf horizontaler Ebene greift in der halben Länge und in der Höhe p eine Kraft P horizontal an. Welche Gröſse muſs sie überschreiten, α) damit das Prisma gleitet, β) damit es kippt. (Futtermauern, Stabilität der Bauwerke gegen Winddruck.) Fig. 44.

9. Dieselbe Aufgabe mit der Abänderung, daſs der Querschnitt des Prismas ein Trapez mit den parallelen Seiten $b + c$ ist.

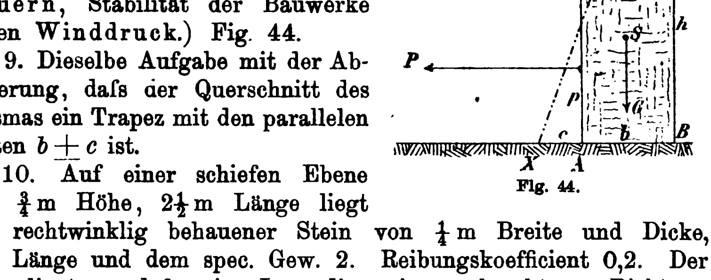


Fig. 44.

10. Auf einer schiefen Ebene von $\frac{3}{4}$ m Höhe, $2\frac{1}{2}$ m Länge liegt ein rechtwinklig behauener Stein von $\frac{1}{4}$ m Breite und Dicke, $\frac{1}{2}$ m Länge und dem spec. Gew. 2. Reibungskoefficient 0,2. Der Stein liegt so, daſs seine Längsdimension senkrecht zur Richtung der schiefen Ebene läuft. Welche Kraft P_1 muſs der schiefen Ebene parallel am Steine wirken, um Herabgleiten zu verhindern, welche Kraft P_2 um ihn hinaufzuschieben? Welche Kraft Q_1 muſs an der Oberseite des Steins parallel zur schiefen Ebene wirken, damit Kippen nach unten, welche Kraft Q_2, damit Kippen aufwärts eintritt? [Vergl. 18 Üb. 1.]

11. Ein quadratischer gerader Pyramidenstumpf, von der Höhe $h = 8$ m und den Basiskanten $a = 2$, $b = 1\frac{1}{2}$ m ist cylindrisch längs der Achse durchbohrt und hat die lichte Weite 1 m. Der Körper hat das spec. Gew. 7,5 und hängt an zwei Ketten, die so an den Endflächen des Stumpfes angreifen, daſs dessen Achse horizontal liegt. Wie groſs sind die Reaktionen in den Ketten?

Aufl.: Reaktion Y an der oberen Endfläche

$$\frac{h}{24}(2a^2 + 4ab + 6b^2 - 3\pi d^2).$$

12. Auf einen Wagen oder Schlitten wirken 1) das Gewicht, 2) die Zugkraft, 3) die Reaktion der Bahn, 4) der Widerstand (gleitende Reibung, rollende Reibung, Adhäsion, Luftwiderstand). Unter welchen Bedingungen sind diese Kräfte im Gleichgewicht, also gleichförmige Bewegungen möglich? Wenn tritt

Bewegung um die Längs-, Quer-, vertikale Achse ein, wenn seitliches Umkippen? (Schlingern der Lokomotiven, Schleudern der Schlitten, Umwerfen der Wagen.)

Beanspruchung der Baukonstruktionsteile.

Ist in einer Baukonstruktion Gleichgewicht aller inneren elastischen Kräfte eingetreten, so verhält sich das Ganze als ein starrer Körper, so lange dieser Zustand inneren Gleichgewichts besteht. Die Kräfte, welche alsdann die einzelnen Teile beanspruchen (spannen, drücken u. s. f.), findet man, indem man sich diese Teile durchschnitten und die so aufgehobenen inneren Kräfte durch Hülfskräfte ersetzt denkt, die sich dem Satze der Aktion und Reaktion zufolge paarweise gleichen. Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen des so entstandenen Kräftesystems leistet der Momentensatz wesentliche Dienste.

13. Zu beweisen, dafs in dem Gerüst Fig. 45

$$S_1 = Q \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}, \qquad S_2 = Q \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

1. Methode: Man zerlegt Q mittels Kräftepolygon oder analytisch.

2. Methode: Man wählt A, dann B als Momentenpunkte.

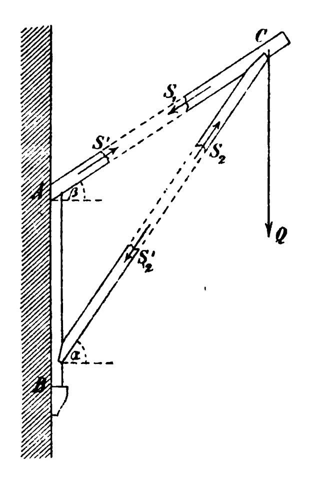


Fig. 45.

Einer der Balken AC oder BC könnte für sich allein die Last Q nicht tragen, so lange er starr bleibt. Thatsächlich biegt er sich, wobei elastische Kräfte auftreten.

14. Hängewerk. Die Eigenlast der Konstruktion und die zufällige Belastung mögen sich so verteilt haben, daſs in A, B, C die Kräfte A, B, Γ angreifen, so daſs A + B + Γ gleich der Gesamt-

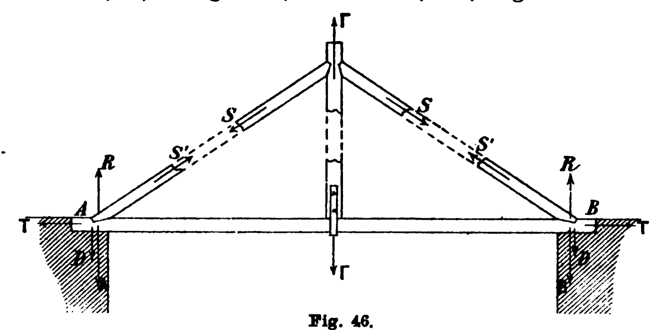


Fig. 46.

last G. Der Mittelstab wird mit Γ gespannt, die Streben mit $S = \Gamma : 2 \sin\alpha$ gedrückt, der Träger selbst mit $T = \Gamma : 2 \tan\alpha$ gespannt, die Lager haben A + D und B + D zu tragen, was zusammen gleich G ist und durch die Reaktion der Lager aufgehoben wird. Auszuführen.

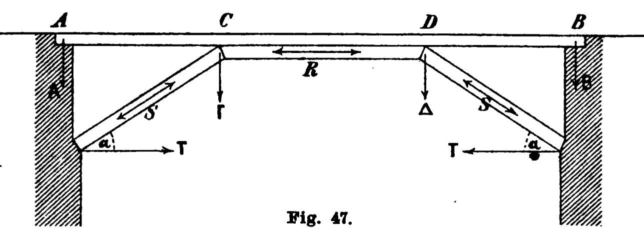


Fig. 47.

15. Sprengwerk. Auf $ABCD$ verteilt sich das Gesamtgewicht $G =$ A + B + Γ + Δ. Man berechne R, S, T und die von den Lagern getragene Last, die gleich G sein muſs.

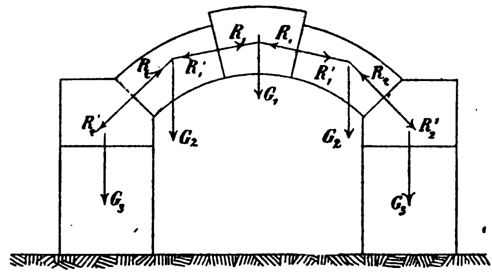


Fig. 48.

16. Gewölbe (auch Mansardendächer). Auf jeden Stein wirken sein Gewicht G und die Reaktionen in seinen beiden Wölb-

fugen. Die Kraftlinien der Reaktionen müssen sich daher in der Falllinie des Steines schneiden. Führt man dies für alle Steine aus, so ergiebt sich ein Seilpolygon aus sämtlichen Kraftlinien der Reaktionen. Welche Bedingung mufs eingehalten sein, damit die Widerlager nicht nach aufsen umkippen? Alle Reaktionen haben gleiche Horizontalkomponente (Horizontalschub).

Vermischte Übungen.

17. Ein Stab lehnt (Fig. 49) zwischen zwei Ebenen, die unter den Winkeln α und $180-\beta$ gegen den Horizont geneigt sind. Unter welcher Bedingung ist Gleichgewicht? Auf verschiedenen Wegen herzuleiten.

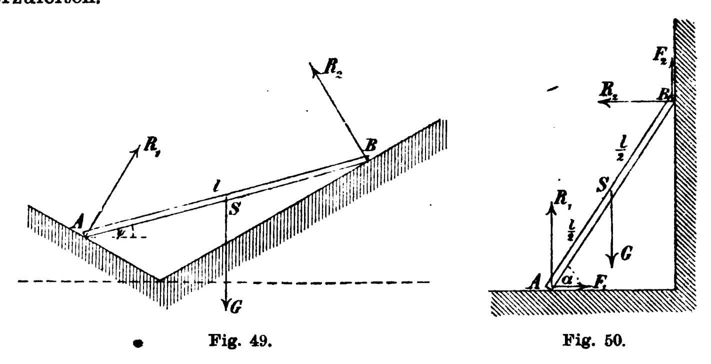


Fig. 49. Fig. 50.

18. Die Ebenen (Üb. 17) sind horizontal und vertikal, so dafs der Stab ausgleiten würde, wenn nicht Reibung wirkte (Fig. 50). Gleichgewichtsbedingung: $\tan\alpha = (1 - \varphi^2) : 2\varphi$, wenn α Neigungswinkel des Stabes und an beiden Wänden φ Reibungskoefficient. Wie heifst die Bedingung, wenn 1) die horizontale, 2) die vertikale Wand glatt ist ($\varphi = 0$). Wie grofs ist φ bei Reibung an beiden Wänden, wenn $\alpha = 10^0$?

19. Üb. 18 wende man an auf das Kartenhaus, indem man die Reaktion der vertikalen Wand, durch die der andern Karte ersetzt.

20. Ein rechteckiges Brett von 50 cm Länge, 1 dm Breite ruht auf drei Stellschrauben, die ein gleichschenkliges Dreieck von 50 cm Höhe, 1 dm Basis bilden (Libellenprüfer). In die Mitte des Bretts wird ein Gewicht von 500 g gesetzt. Wie grofs sind die drei Reaktionen? Wie grofs, wenn das Gewicht 10 cm von der Basis, 6 cm von der Längsseite absteht?

21. Die Wetterfahne soll in Bezug auf die Schwere astatisch sein, so dafs der Winddruck ihre Gleichgewichtslage bestimmt. Die Fahnenseite sei ein Rechteck von 2 dm Höhe, 6 dm Länge,

3 cm Dicke, die spitze Seite ein Stab von quadratischem Querschnitt mit 3 cm Höhe und Dicke und von 6 dm Länge. Wie müssen sich die specifischen Gewichte der Fahne und des Stabes verhalten? Wie grofs ist der Winddruck und sein Moment bez. auf die Drehachse, wenn pro qm 120 kg Winddruck gerechnet werden und die Fahne normal gegen die Windrichtung steht, wie grofs, wenn sie mit dieser den Winkel α bildet? Wenn ist stabiles, wenn labiles Gleichgewicht?

Die Magnetnadel.

Die Erde übt auf jede magnetische Molekel und daher auch auf jeden Magneten ein Kräftepaar aus, dessen Kräfte in den beiden Polen angreifen und die Richtung der Inklinationsnadel haben. Die Gröfse dieser Kräfte ist $R\mu$, wo R die Intensität des Erdmagnetismus, μ der freie Magnetismus oder die magnetische Masse eines Poles bedeutet. Steht die Nadel senkrecht zur Richtung der Inklinationsnadel, so ist RM das Moment jenes Paares, wo $M = \mu l$ das magnetische Moment der untersuchten Nadel heifst, l die Poldistanz des Magneten. μ, l, M sind Konstanten für jeden Magneten, R ist Konstante für jeden Erdort zu gegebener Zeit. Das Moment RM heifst die von der Erde auf die Nadel ausgeübte Richtkraft (Direktionskraft).

22. An einem Orte der nördlichen Halbkugel, dessen Inklination zur Beobachtungszeit $i = 62^0\, 30'\, 22'',8$ ist, hat man einen homogenen magnetischen Stahlstab von $G = 50$ g im Schwerpunkte aufgehängt. In welchem Abstand x von letzterem mufs ein Laufgewicht von $G_1 = 0{,}1$ g auf der Südhälfte der Nadel befestigt werden, damit die Nadel in horizontaler Ebene schwingt (Deklinationsnadel)? RM sei gleich 25,0714 g . mm. Wie grofs ist die Reaktion im Aufhängepunkte?

23. Ist RM das von der magnetischen Kraft auf die freie Nadel ausgeübte Moment, wenn die Nadel zum Meridian senkrecht steht, wie grofs ist α) in der gleichen Lage das die Deklinationsnadel bewegende Moment, β) das auf die Inklinationsnadel ausgeübte, wenn sie horizontal im Meridian steht? Wie grofs ist überhaupt das Moment, wenn die Nadel unter $\sphericalangle\, \beta$ gegen den Horizont geneigt ist, und ihre Horizontalprojektion mit dem (Nord-) Meridian den $\sphericalangle\, \alpha$ bildet. Wenn ist die Deklinations-, die Inklinationsnadel in stabilem, labilem Gleichgewicht? Inklination i.

(Man behandle die Momente als Streckengröfsen [25].)

24. Eine Magnetnadel, die als Inklinationsnadel im Meridian schwingt, sei nicht genau im Schwerpunkt aufgehängt. Welchen Einflufs hat der Fehler auf ihre Angaben der Inklination?

25. Ein elektrischer Strom übt auf jeden Pol eines Magneten eine Kraft von bekannter Richtung aus, die proportional der Stromstärke J und der magnetischen Masse μ ist. (Der Proportionali-

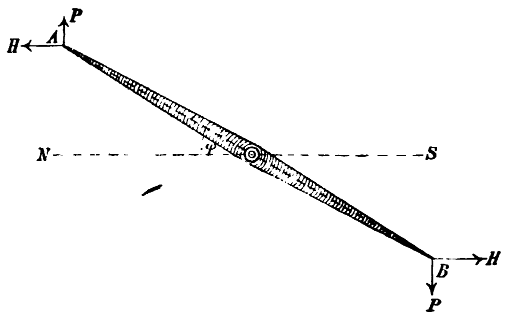


Fig. 51.

tätsfaktor ist abhängig von der Lage des Stromes und der Nadel.) Wie grofs ist hiernach die Ablenkung φ, welche die Deklinationsnadel einer Tangentenbussole erfährt, wenn die Horizontalintensität des Erdmagnetismus $H = R \cos i$ ist?

26. Ebenso für die Sinusbussole.

27. Ebenso für das Galvanometer mit einfacher Nadel und mit astatischem Nadelpaar. Hier wirkt als zurückführendes Paar die Torsion des Aufhängefadens, deren Moment der Ablenkung proportional gesetzt werden darf.

Vermischte Übungen.

28. Welche Bedingung mufs erfüllt sein, wenn ein Bierglas mit Scharnierdeckel beim Öffnen des Deckels nicht umkippen soll? Gegeben: Gewicht der festen Teile G_1, des beweglichen Teils G_2, der Flüssigkeit G_3. Abstände der Schwerpunkte dieser drei Teile von der Kippachse a_1, a_2, a_3. Veränderlich sind G_3 und a_2. Welchen Einflufs üben diese Gröfsen?

29. Eine rechteckige homogene Platte $ABCD$ ist um die Seite $AB = a$ drehbar, ihr Gewicht sei G, die Seite $BC = b$. In der Mitte der Seite CD zieht eine Kraft K von gegebener Richtung. Gleichgewichtsbedingung anzugeben, wenn

1) AB horizontal, α) K vertikal, β) K in der zu BC parallelen Vertikalebene, γ) K geneigt gegen diese Ebene. (Zugbrücke, Klappe und Fallthür in horizontaler und schiefer Ebene, Dachluke.)

2) AB vertikal, K in der Horizontalebene. (Thür.)

3) AB wenig geneigt gegen die Vertikale. (Beschädigte Thürangeln, selbstzufallende Thür.)

30. Unter welchem Winkel ϑ gegen eine vertikale Wand ist ein homogener gerader Stab von der Länge l im Gleichgewicht, der sich gegen die Wand lehnt und durch einen horizontalen, der

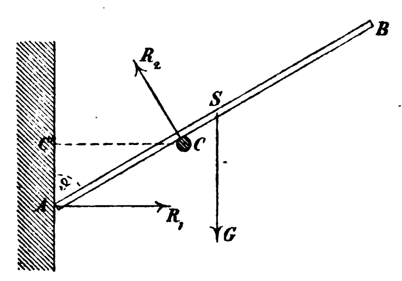


Fig. 52.

Wand im Abstande c parallel liegenden Stab getragen wird? Ohne Reibung. (Thomson und Tait.) Resultat: $\sin^3 \vartheta = 2c : l$. Durch Versuche mit Stricknadeln und Glasscheibe zu bestätigen, wobei man ϑ durch eine goniometrische Funktion aus $\triangle\, ACC'$ bestimme.

31. Ein homogenes Brett von der Länge l liegt auf einem

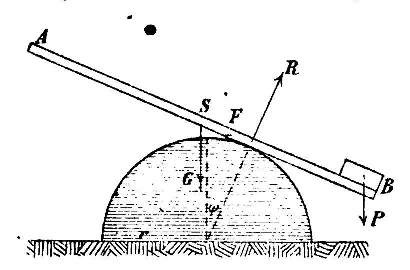


Fig. 53.

Halbcylinder, an dem einen Ende durch P kg belastet. In welcher Lage ist Gleichgewicht, wenn der Reibungskoefficient am Cylinder f heifst? (Schell.)

Die Wage.

Schnellwage [siehe 24, Üb. 3].

32. Gemeine Wage. Es mögen der Stützpunkt O und die Aufhängepunkte AB der Wagschalen (Stahlschneiden auf Stein- oder Stahllager) in einer Geraden liegen, $OA = a$, $OB = b$. Der Schwerpunkt des Wagbalkens liege in S um $s = OS$ vom Drehpunkt entfernt und es sei $OS \perp AB$. Sind dann $\mathsf{A}\,\mathsf{B}$ die Gewichte der belasteten Schalen, G das Gewicht des Wagbalkens, so ist Gleichgewicht bei einem Ausschlagswinkel α, für welchen

$$\tan \alpha = \frac{\mathsf{A}a - \mathsf{B}b}{Gs}.$$

Dies ist aus dem Momentensatze herzuleiten.

Richtig ist eine Wage, wenn $\alpha = 0$ bei beiderseits gleichen Belastungen. Wie mufs die Wage konstruiert werden, um richtig zu sein?

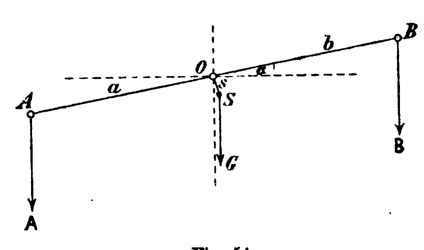


Fig. 54.

Empfindlich ist eine Wage, wenn sie einen geringen Belastungsunterschied durch einen grofsen Ausschlag anzeigt. Wie hängt die Empfindlichkeit von s ab. Darf $s = 0$ gemacht werden?

Vergl. [36].

33. Welchen Vorteil bietet die einseitige Wägung, bei welcher die Last und nachher die Gewichtsstücke auf dieselbe Schale gelegt werden, die andere Schale nur für die Tara benutzt wird?

34. Neigungswage. Der um O drehbare Wagbalken und die Wagschale haben in S ihren Gesamtschwerpunkt. S liegt auf einem Zeiger, der an einer Teilung das Gewicht L ablesen läfst,

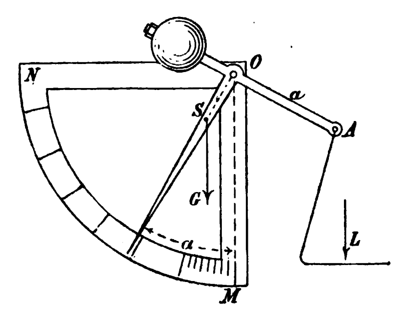


Fig. 55.

welches auf eine bei A hängende Schale (oder einen Haken) gebracht wurde. $OA = a$, $OS = s$. Man entwickele die Gleichgewichtsbedingung für den Ausschlag α und gebe eine Vorschrift zur Teilung des Bogens MN an.

35. Brückenwage von Quintenz. Drei Hebel, deren Gleichgewichtsbedingungen man aufstelle, durch Einführen der in den

Verbindungsstangen wirkenden Reaktionen A B und der Auflagerreaktion Δ. Da diese gleich L — A, kann man sie und dann

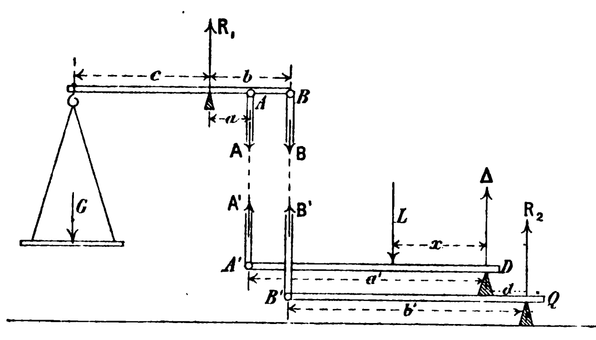


Fig. 56.

A B eliminieren. Die erhaltene Gleichung für G wird nur dann unabhängig von x, wenn $a : b = d : b'$ Konstruiert man so und macht noch $a : c = 0{,}1$, so erhält man eine richtige Decimalwage.

Wie grofs sind die Reaktionen $R_1 R_2$? $R_1 + R_2 = G + L$.

36. Man zeige, dafs, sobald $a : b = d : b'$, der Hebel, auf dem die Last liegt (die „Brücke") sich nicht dreht, sondern parallel verschiebt. Dasselbe hätte man aus der güldenen Regel folgern können. Auch bei allen Tafelwagen müssen die Tafeln parallel geführt sein, dürfen sich nicht drehen.

37. Um die Gesamtlast zweier gemeinsam (z. B. mit Baumstämmen) beladenen Lowries zu bestimmen, fährt man erst die eine, dann die andere auf die Gleiswage (eine Brückenwage). Wie ergiebt sich das Gewünschte?

VII. Die drehende Bewegung der starren Körper.

31. Die gleichförmige Bewegung eines Punktes im Kreise. — Hat ein Körper die Freiheit, sich um eine feste Achse zu drehen, so kann jeder Punkt des Körpers einen Kreis beschreiben, die Punkte der Achse ausgenommen. Diese Kreise liegen in parallelen Ebenen, ihre Mittelpunkte auf der Achse. Die Richtung jedes Punktes ändert sich also in jedem Augenblicke seiner Kreisbewegung, was dem Beharrungsgesetze zufolge eine Kraft erfordert.

Um diese zu ermitteln, denken wir uns, ein Punkt bewege sich längs des Umfangs $ABCD\ldots$ eines regelmäfsigen n-Ecks, dessen Mittelpunkt O heifse. Der Punkt habe die gleichförmige Geschwindigkeit c. Nach Durchlaufen der ersten Seite AB würde

er dem Trägheitssatze gemäfs in der nächsten Sekunde die Strecke $BB_1 = c$ beschreiben. Er ist aber gezwungen in B seine Richtung zu ändern und soll die Strecke $BB_3 = c$ durchlaufen. Das ist nur dadurch möglich, dafs in B auf ihn eine Bewegungsursache einwirkt, welche, wenn sie allein gewirkt, also der Punkt in B geruht hätte, ihn um ein Stück bewegt haben würde, das mit B_1B_3 nach Gröfse und Richtung übereinstimmt.

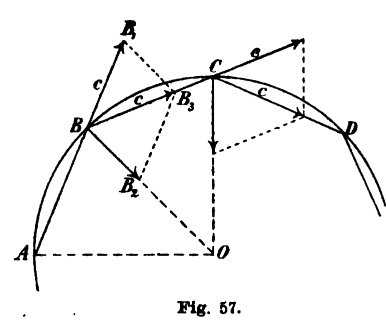


Fig. 57.

Es sei $BB_2 \# B_1B_3$ dieses Stück, so dafs $BB_1B_3B_2$ ein Parallelogramm. Da $B_1B_3 \parallel BO$, wie leicht zu beweisen, so liegt B_2 auf BO. Weiter folgt aus $\triangle BB_3B_1 \sim OBA$ die Proportion

$$B_1B_3 : BB_1 = AB : AO.$$

Ist r der Radius des dem Polygon $ABCD\ldots$ umbeschriebenen Kreises, T die Zeit, in welcher der bewegte Punkt es mit der Geschwindigkeit c umläuft, so folgt

$$BB_2 = \frac{c^2}{r} \cdot \frac{T}{n},$$

d. h. die im Punkte B nötige Bewegungsursache mufs so beschaffen sein, dafs sie — allein wirkend — dem Körper eine gleichförmige Bewegung erteilen würde, die ihn in der Sekunde um die eben berechnete Strecke dem Mittelpunkte O zu bewegt, oder mit anderen Worten, sie mufs momentan die Geschwindigkeit $(c^2:r).(T:n)$ erteilen und dann zu wirken aufhören.

Solcher momentanen Geschwindigkeitsantriebe müssen dem bewegten Punkte bei jedem, T Sekunden währenden Umlaufe n erteilt werden, sie müssen sich also in Zeitintervallen $T:n$ folgen.

Würden diese n Antriebe einem anfangs ruhenden Punkte sämtlich in derselben Richtung erteilt, so würde ihre Wirkung nicht wie in unserem Falle eine Richtungsänderung, sondern eine Geschwindigkeitsänderung sein und zwar würde der ruhende Punkt durch sie die Endgeschwindigkeit

$$n\frac{c^2}{r} \cdot \frac{T}{n} = \frac{c^2}{r} \cdot T$$

in der Zeit T erlangen.

Dieser Ausdruck ist unabhängig von der Eckenzahl des Vielecks $ABCD\ldots$, gilt also auch noch, wenn sich das Polygon dem umbeschriebenen Kreise beliebig nahe anschmiegt. Bei wachsender Eckenzahl wird zwar jeder einzelne Antrieb kleiner, aber ihre Anzahl gröfser, die Gesamtwirkung bleibt und diese ist in unserem Falle die Richtungsänderung in T Sekunden, im damit verglichenen Falle gleichgerichteter Antriebe die Geschwindigkeitszunahme in derselben Zeit. Bei wachsender Eckenzahl des Vielecks folgen sich aber die Antriebe in immer kürzeren Zwischenzeiten, so dafs endlich die der Kreisbewegung entsprechende Geschwindigkeitszunahme $(c^2 : r).T$ gleichförmig beschleunigt erfolgt; ihre Beschleunigung ist $\varkappa = c^2 : r$. Diese Gröfse benutzt man als das Mafs jener Antriebe. Man nennt sie die Kreis- oder Normalbeschleunigung Ihre Mafseinheit ist m : sec², wie die jeder anderen Beschleunigung. Damit sich ein Punkt gleichförmig mit der Geschwindigkeit c im Kreise vom Radius r bewege, mufs ihm in jedem Augenblicke eine Beschleunigung

$$\varkappa = \frac{c^2}{r},$$

die Normalbeschleunigung, in der Richtung nach dem Kreismittelpunkte erteilt werden.

Die Masse m wird gleichförmig im Kreise bewegt durch eine stets nach dem Mittelpunkte gerichtete Kraft $P = m\varkappa = mc^2 : r$, die Centripetalkraft (centrum, petere). Würde diese plötzlich aufhören zu wirken, z. B. wenn die bewegte Masse eben den Punkt B passiert, so würde sich sofort die Masse m geradlinig längs der Tangente im Punkte B bewegen, wie es das Trägheitsgesetz fordert. Mit wachsender Eckenzahl des Polygons $ABCD\ldots$ nähert sich nämlich die Richtung der Seiten mehr und mehr der Richtung der Tangenten des umbeschriebenen Kreises. Daher wird auch die augenblickliche Geschwindigkeit c einer Kreisbewegung durch eine Strecke von der Richtung der Tangente und der Länge c dargestellt.

Auf die Führung d. i. die Vorrichtung, welche die bewegte Masse nötigt, fortwährend aus der tangentialen Richtung, die das Trägheitsgesetz fordert, in die Kreisbahn einzulenken, wirkt die Masse mit der Reaktion der Centripetalkraft ein, der Centrifu-

galkraft (centrum, fugere). Schwingt man z. B. einen Stein an einem Faden im Kreise herum, so wird immer der Stein durch den Faden nach innen (zur schwingenden Hand) hingezogen von der Centripetalkraft, der Faden aber durch den Stein nach aufsen gespannt von der Centrifugalkraft.

Wirken mehrere Kräfte auf einen Punkt ein, der sich gleichförmig im Kreise bewegt, so können sie natürlich nicht im Gleichgewichte stehen (denn dann könnte der Punkt sich nur gleichförmig geradlinig bewegen), sondern müssen zur Resultante die erforderliche Centripetalkraft haben oder mit einer dieser Kraft entgegengesetzt gleichen Hülfskraft im Gleichgewichte stehen. Diese Hülfskraft darf man nicht mit der Centrifugalkraft verwechseln, mit der sie gleich und gleichgerichtet ist: man hat sie auf den bewegten Punkt wirkend vorzustellen, die Centrifugalkraft aber wirkt auf die Führung.

32. Die gleichförmige Rotation eines starren Körpers. Die Punkte eines gleichförmig rotierenden Körpers haben verschiedene und verschieden gerichtete Geschwindigkeiten. Kennt man aufser der Drehungsachse noch die Geschwindigkeit eines der Punkte ihrer Gröfse nach, so kann man die Geschwindigkeiten aller Punkte nach Gröfse und Richtung angeben, kennt also den Geschwindigkeitszustand des Körpers. Es ist üblich die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstande 1 von der Rotationsachse anzugeben. Man nennt diese Geschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit w des Körpers. Die Geschwindigkeit c eines Punktes im beliebigen Abstande r folgt dann aus ähnlichen Dreiecken $c = w \,.\, r$. Auch durch Angabe der Umlaufszeit T oder der Umdrehungszahl N, d. i. der Zahl der Umdrehungen in der Zeiteinheit, bestimmt man den Geschwindigkeitszustand des Körpers. Man findet leicht: Ausgedrückt durch die

	Geschw.	Winkel-geschw.	Umlaufs-zeit	Umdreh.-zahl
ist die Geschwindigkeit	c	$= w \,.\, r$	$= \frac{2\pi}{T} r$	$= 2\pi N \,.\, r$
die Kreisbeschleunigung . . . $\varkappa =$	$\frac{c^2}{r}$	$= w^2 \,.\, r$	$= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$	$= (2\pi N)^2 \,.\, r$

für einen Punkt im Abstand r von der Achse.

Ist m die Masse eines Punktes im Abstand r, so ist $\frac{1}{2} mc^2$ dessen kinetische Energie, daher die des ganzen Körpers

$$K = \Sigma \frac{1}{2} m c^2 = \frac{1}{2} w^2 \Sigma m r^2 = \frac{1}{2} \mathsf{M} w^2,$$

wo $\mathsf{M} = \Sigma mr^2$ das Trägheitsmoment des Körpers heifst, bezogen auf die Drehachse. Das Trägheitsmoment ersetzt man auch durch das Produkt $\varrho^2 . \Sigma m$ und nennt ϱ Trägheitsradius. Die durch das Zeichen Σ angedeuteten Summationen enthalten so viele Glieder, als Punkte am Körper unterschieden werden.

Ändert sich die Winkelgeschwindigkeit des Körpers — also auch seine kinetische Energie — so ist die Rotation eine ungleichförmige. Sie ist gleichförmig beschleunigt oder verzögert, wenn sich die Winkelgeschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleichviel verändert, wie klein man auch die Zeiten wähle. Die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit in der Sekunde heifst alsdann Winkelbeschleunigung. Ist sie p, so ist $p' = pr$ die Beschleunigung eines Punktes im Abstande r.

Anmerkung. Die Bewegung eines Punktes im Abstand 1 von der Achse eines sich drehenden Körpers, benutzt man nicht nur zur Angabe der Geschwindigkeit und Beschleunigung der einzelnen Punkte des Körpers, sondern auch zur Angabe des Weges, den dieselben durchlaufen. Dreht sich der Körper um 360^0 um seine Achse, so legt ein Punkt im Abstande r den Weg $2\pi r$ zurück, einer im Abstande 1 den Weg 2π. Statt den Winkel, um den sich ein Körper gedreht hat, in Winkelmafs anzugeben, wie in der niederen Geometrie üblich, kann man ihn auch in Bogenmafs ausdrücken, d. h. die Bogenlänge angeben, die ein Punkt im Abstande 1 von der Drehachse beschrieben hat. Die Angabe: ein Körper hat sich um 60^0 gedreht, ist also identisch mit der: er hat sich um $\frac{1}{3}\pi$ gedreht, d. h. ein Punkt in 1 m Abstand hat $\frac{1}{3}\pi$ m zurückgelegt. Auf diese Weise wird die besondere Mafseinheit für Winkel unnötig, der Winkel wird dargestellt durch eine reine Zahl, durch das Verhältnis des Bogens zum Radius.

Ein Winkel der in Gradmafs ist

ist in	360^0	1^0	α^0	$\frac{180^0}{\pi} = 57^0{,}29\,578 = 206\,264{,}''8$
Bogenmafs	2π	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180} \cdot \alpha$	1.

Übungen.

1. Die Umdrehungszahl eines Schwungrades ist 100 (bei Maschinen immer pro min. zu verstehen, also $60\,N = 100$ nach unseren Bezeichnungen). Wie grofs ist w, T? Wie grofs c, $\varkappa$ für einen Punkt des Umfangs ($r = 1$ m)? Wenn An- und Ablauf der Maschine gleichförmig beschleunigt bez. verzögert erfolgen und 1 min dauern, wie grofs ist während dieser Bewegungen p, p'? Man gebe die Mafseinheiten an für c, $\varkappa$, w, T, N, p, p'. Z. B. ist für die Turenzahl 100 die Einheit 1 : min.

2. Ein Stein von 0,5 kg soll an einem 1 m langen Faden im Kreise geschwungen werden, so dafs er in der Sekunde einmal umgeht. Welche Kraft mufs der Faden aushalten können, und welche, wenn er nur 5 dm lang ist?

3. Die Masse P kann sich längs der Schiene AB bewegen und ist durch einen Faden mit dem Gewichte G verbunden. Der Apparat wird um die Vertikale AC in Rotation versetzt mittels der Schwungmaschine. Bei der Winkelgeschwindigkeit w ist P in einer bestimmten Entfernung $AB = x$ von der Achse im Gleichgewicht. Wie grofs ist x? Ist das Gleichgewicht stabil? Beispiel: $P = G$, $w = 0{,}5\ \text{sec}^{-1}$. Dieser Apparat macht die Centrifugalkraft mit einer stets in unveränderter Richtung wirkenden Kraft vergleichbar.

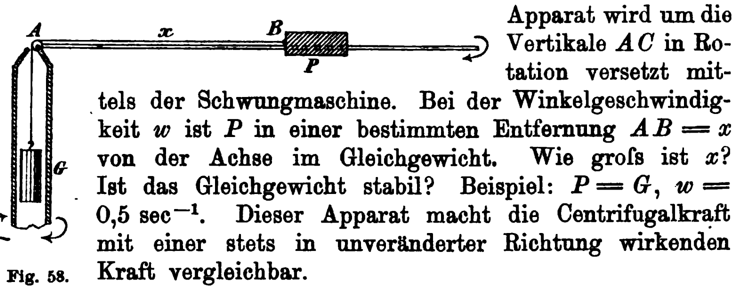


Fig. 58.

4. Eine horizontale Schiene, die um eine Vertikalachse in Drehung versetzt wird, trägt zwei homogene Kugeln aus gleichem Material. Die eine hat zwei, die andere 3 cm Dicke. Beide sind durch einen 3 dm langen Faden verknüpft. Wie müssen sich ihre Abstände von der Achse verhalten, wenn Gleichgewicht bestehen soll? Ist dasselbe stabil? Die Kugeln möge man als zwei Punkte betrachten, in denen das Gewicht derselben vereinigt ist.

5. Um eine vertikale Achse dreht sich ein Draht, der sie unter $\sphericalangle\,\alpha$ schneidet. Auf diesem kann eine Perle vom Gewichte G gleiten. Liegt diese im Abstande s von dem Schnittpunkte mit der Achse, wie grofs mufs dann die Winkelgeschwindigkeit sein, damit die Perle ruhen bleibe? α) Ohne, β) mit Reibung.

6[a]. Um eine vertikale Achse AC (Fig. 59) dreht sich ein schwerer Punkt B, mit ihr durch den (gewichtslosen) Faden $AB = l$ verbunden. Wie grofs ist die Winkelgeschwindigkeit und die Umlaufszeit, wenn sich der Faden unter dem Winkel α gegen die Achse einstellt? Centrifugalpendel. (Die auf B wirkenden beiden Kräfte müssen die Centripetalkraft zur Resultante haben, oder mit der Hülfskraft H im Gleichgewichte stehen).

6^b. Im Punkte A sind sehr viele Centrifugalpendel von verschiedener Länge angeknüpft. Welches ist der geometrische

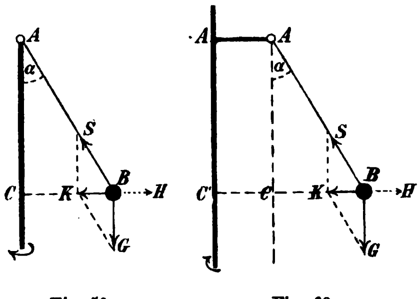


Fig. 59. Fig. 60.

Ort ihrer Massenpunkte bei der Winkelgeschwindigkeit w? (**Lösung**: Zwei Gerade, eine für stabile, eine teils für stabile, teils für labile Lagen). Welchen Wert mufs w überschreiten, damit ein Pendel von der Länge l die vertikale Lage verläfst?

7^a. Wie Üb. 6^a, doch hängt der Faden an einem Querarme $A'A = a$ der Rotationsachse $A'C'$ (Fig. 60). Gieb die Gleichung an, die zur Bestimmung von α dient, wenn a, l, w gegeben sind.

7^b. Wie Üb. 6^b, doch sitzt der Befestigungspunkt A der Pendel an einem Querarme $A'A = a$ der Achse $A'C'$. **Lösung**: Gleichseitige Hyperbel. (Rittershaus.)

8. **Centrifugalregulator von Watt, Centrifugaltachometer.** AA' Rotationsachse. Auf ihr kann das Gewicht Q gleiten. Die Stangen $AB = AB' = a$, CD, $C'D'$ sind gewichtslos. Es sei $AC = CD = AC' = C'D' = b$. Auf AB wirken das Gewicht G, die Spannung S, die Reaktion in A. Diese Kräfte müssen zur Resultante die Centripetalkraft des Körpers B, daher in A dasselbe Moment liefern wie letztere. Weiter ist $S = Q : 2 \cos\alpha$. Man entwickele die Gleichung zwischen der Winkelgeschwindigkeit w und dem Ausschlagswinkel α, weiter die zwischen w und $AD = h$.

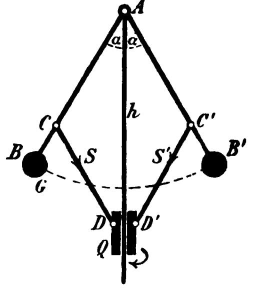


Fig. 61.

Aufl. $h = \frac{2gb}{aw^2}\left(1 + \frac{Qb}{Ga}\right)$.

9. Die Erde sei eine Kugel, die allen Punkten an ihrer Oberfläche die Beschleunigung γ nach dem Mittelpunkte erteilt. Diese mufs 1) als Komponente die Centripetalbeschleunigung liefern, welche man für den Äquator aus Erdradius R und Rotationsdauer T bestimme. Die andere Komponente ist g, die Beschleu-

nigung der Schwere. Wie grofs müfste der Unterschied in den Werten von g für Pol und Äquator sein? Was folgt daraus, dafs dieser berechnete Unterschied mit dem wirklichen Unterschiede [8, Üb. 2] nicht übereinstimmt?

Dasselbe führe man aus für die beliebige Breite φ. Man berechne also erst die Kreisbeschleunigung in dieser Breite, bestimme dann die Komponente von γ, die als Schwere wirkt nach Gröfse und Richtung, auch deren tangentiale und radiale Komponente τ, ϱ. Wieviel weicht die Richtung der Schwere von der Richtung nach dem Erdmittelpunkt ab bei $\varphi = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$.

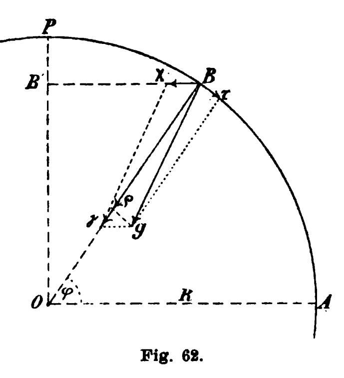


Fig. 62.

10. Bei welcher Umlaufszeit würde die Schwere am Äquator gleich 0 sein, trotzdem die Erde anziehend mit der Beschleunigung γ wirkte? Erde als Kugel betrachtet wie bei Üb. 9.

11. Welche Geschwindigkeit mufs ein Meteorit besitzen, damit er sich dem Äquator entlang gleichförmig um die Erde bewegt, nachdem er in die Erdatmosphäre hereinstreifte. In welcher Zeit umläuft er die Erde? (Wirkt γ oder g als Kreisbeschleunigung?)

12. Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit des α) Sekunden-, β) Minuten-, γ) Stundenzeigers, δ) der Erde bei ihrer Rotation, ε) der Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne, ζ) eines Schnellzugs in starker Kurve von 300 m Radius.

13. Welche Geschwindigkeit haben die Luftteilchen in 10^0, 30^0, 50^0, 70^0 Breite wegen der Erddrehung? Erklärung der Ablenkung der Passate von der meridionalen Richtung, Erklärung des Dove'schen Winddrehungsgesetzes und der Wirbel um Minima und Maxima des Luftdrucks.

14. Warum wird das rechte Ufer eines Flusses stärker ausgewaschen als das linke, wenn der Flufs mit grofser Geschwindigkeit von Nord nach Süd oder von Süd nach Nord fliefst?

15. Die äufseren Schienen doppelgleisiger Eisenbahnen von meridionaler Richtung werden durch die Reibung stärker verschoben als die inneren. Warum? (Die Eisenbahnzüge fahren rechts).

16. Um wieviel ist die Geschwindigkeit eines Körpers in $h = 160$ m Höhe gröfser als die an der Erdoberfläche, α) am Äquator, β) in der Breite φ? Östliche Abweichung fallender Körper. (In Freiberg, $\varphi = 50^0 57'$, $g = 9{,}811$, fand Reich 28,4 mm östliche Abweichung bei 158,5 m Fallhöhe. Die theore-

tische Berechnung dieser Abweichung entzieht sich elementarer Behandlung).

17. Warum neigen sich Menschen und Pferde, die rasch eine Kurve durchlaufen, nach dem Krümmungsmittelpunkte hin? Warum erhöht man den äufseren Schienenstrang in Eisenbahnkurven? Vergl. Üb. 6[a], die Reaktion wird dort durch den Faden, hier durch die Schienen ausgeübt. Ist s die Spurweite (1,435 m abgesehen von der Spurerweiterung in Kurven), ϱ der Kurvenradius, c die Fahrgeschwindigkeit, so ist die Schienenüberhöhung $h = sc^2 : g\varrho$. Wie grofs ist sie für $\varrho = 300$ m, 1000 m, 3000 m, wenn für c die Schnellzugsgeschwindigkeit 20 m : sec gesetzt wird?

18. An einer vertikalen Achse $A'B'$ sitzen auf zwei zu ihr senkrechten Querarmen $AA' = a$, $BB' = b$ zwei Punkte A und B von den Gewichten AB. $\sphericalangle (AA', BB') = \varphi$, $A'B' = h$. Man soll die bei der Winkelgeschwindigkeit w auftretenden Centrifugalkräfte zusammensetzen, α) wenn $\varphi = 0$, β) $\varphi = 180^0$, γ) wenn A' mit B' zusammenfällt, δ) im allgemeinen Falle. Unter welcher Bedingung stehen die Centrifugalkräfte im Gleichgewicht (freie Achse), wenn bilden sie ein Paar?

19. Man soll freie Achsen (Üb. 18) aufsuchen für α) einen homogenen geraden Kreiscylinder, β) eine homogene quadratische Platte, γ) ein Schwungrad.

Anmerkung. Sucht man die Lage der Achse zu ändern, um die ein Körper rotiert, so nötigt man die Punkte desselben zu Richtungsänderungen, denen sich Centripetalkräfte widersetzen. Auf diesem Widerstande gegen Achsenänderung, den man fühlt, wenn man die Achsenänderung mit der Hand vorzunehmen sucht, beruht eine Reihe von Erscheinungen, die zu verwickelt sind, um mit elementaren Mitteln vollständig durchschaut werden zu können. Es sind insbesondere die Bewegungserscheinungen des gewöhnlichen Kreisels, des Kreisels mit festgehaltener Spitze (Apparate von Bohnenberger, Fechner), der Präcession und Nutation der Erdachse, des Foucault'schen Pendels, (dessen Pendelkörper Freiheit hat, sich auf einer Kugelfläche unter Einflufs der Erdrotation zu bewegen).

33. Das Pendel. — Ein starrer Körper, der Freiheit hat, sich um eine horizontale Achse zu drehen und auf den die Schwere wirkt, heifst ein Pendel.

Jeder einzelne Punkt eines solchen Körpers hat Freiheit sich auf einem vertikalen Kreisbogen unter dem Einflufs der Schwer-

kraft zu bewegen. Ein solcher vereinzelter materieller Punkt heifst ein **mathematisches Pendel** und im Gegensatz zu ihm ein pendelnder Körper physisches Pendel. Ein mathematisches Pendel kann angenähert dargestellt werden

1) durch eine Perle, die längs eines in vertikaler Ebene liegenden Drahtes gleiten kann,

2) durch einen kleinen schweren Körper, der an einem dünnen Faden hängt (ein Lot), wenn die Bedingung erfüllt wird, dafs der Faden nie eine bestimmte Vertikalebene verläfst.

Wir untersuchen zunächst die Bewegung eines Punktes auf einem in vertikaler Ebene liegenden Umfange eines regelmäfsigen Vielecks, also auf einer Reihe aneinanderstofsender schiefen Ebenen. Wir nehmen an, der Übergang von einer Vieleckseite auf die nächste sei so eingerichtet, dafs die Endgeschwindigkeit auf jener gleich der Anfangsgeschwindigkeit auf dieser ist. Auf den bewegten Punkt wirkt nun seine Schwere $G = mg$ und die Reaktion an den Seiten und den Ecken des Vielecks. Die Reaktion an den Ecken ist die [31] untersuchte Kraft, die bei wachsender Eckenzahl in die Centripetalkraft übergeht. Auf einer beliebigen unter $\sphericalangle\, \varphi$ gegen den Horizont geneigten Vieleckseite ist die Beschleunigung [15]

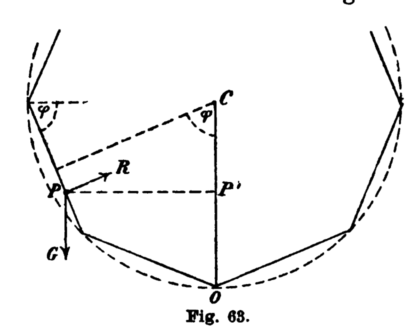


Fig. 63.

$$1^a. \qquad p' = g \sin \varphi.$$

Bezeichnet ferner v_0 die Geschwindigkeit des bewegten Punktes beim Durchgange durch die tiefste Lage O, v seine Geschwindigkeit in der beliebigen Lage P, h die Fallhöhe zwischen P und O, so ist [20]

$$2^a. \qquad \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{m}{2} v^2 = Gh.$$

Vergröfsert man nun die Zahl der Seiten des regelmäfsigen Vielecks, ohne den Radius des Kreises zu ändern, dem es einbeschrieben ist, so nähert man sich beliebig dem mathematischen Pendel.

Betrachten wir nun die Bewegung des mathematischen Pendels. Auf den materiellen Punkt P wirkt seine Schwere $G = mg$ und die Reaktion S der Bahn, die ein Kreis vom Radius l sei. Beide Kräfte können sich nur Gleichgewicht halten, wenn P in O oder O' sich befindet, dem tiefsten und höchsten Punkte der Bahn. Die Lage in O' ist ausgeschlossen, wenn die Reaktion durch die Spannung eines Fadens CP ausgeübt wird, sonst ist sie labile Gleichgewichtslage. Eine beliebige andere Lage des Punktes P wird dadurch bestimmt, dafs man den Winkel OCP angiebt, dessen Gröfse gemessen in Bogenmafs gleich φ sei. Dieser Winkel heifst der Elongationswinkel des Pendels und der Bogen $OP = l\varphi$ die Elongation. Bewegt sich der Punkt durch die betrachtete Lage P mit der Winkelgeschwindigkeit w, so mufs ein Teil von S als Centripetalkraft verwendet werden, der Rest $S - lw^2$ setzt sich mit G zu der längs der Bahn wirkenden bewegenden Kraft K zusammen, welche daher den Wert

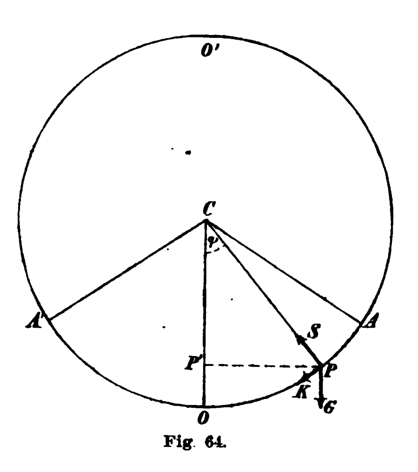


Fig. 64.

$$K = G \sin \varphi$$

besitzt und die Beschleunigung

$$p' = g \sin \varphi$$

in tangentialer Richtung erteilt oder die Winkelbeschleunigung

$$1. \qquad p = \frac{g}{l} \sin \varphi .$$

Ist ferner w_0 die Winkelgeschwindigkeit beim Durchgange durch die Gleichgewichtslage, so erleidet die kinetische Energie des bewegten Punktes bei der Bewegung von P nach O die Zunahme $\frac{1}{2} ml^2 w_0{}^2 - \frac{1}{2} m\, l^2 w^2$, während die potentielle Energie sich vermindert um die Arbeit der Schwerkraft, also um $Gl(1 - \cos \varphi)$. Da die Spannung S, sowie die Centripetalkraft lw^2 nicht Arbeit leisten [20, Üb. 5], so ist nach dem Energiegesetze

$$\frac{m}{2} l^2 w^2 = \frac{m}{2} l^2 w_0^2 - Gl(1 - \cos\varphi)$$

2. $$w^2 = w_0^2 - 2\frac{g}{l}(1 - \cos\varphi).$$

Hiernach läfst sich zu jedem Elongationswinkel φ die Winkelgeschwindigkeit berechnen, wenn die für den tiefsten Punkt gültige bekannt ist. Im höchsten Punkte O' z. B. ist

$$w^2 = w_0^2 - (4g:l).$$

Ist $w_0^2 > 4g:l$, so entsteht eine ungleichförmige Kreisbewegung, weil nur dann zu jedem Werte von φ ein reeller Wert von w sich ergiebt. Ist $w_0^2 < 4g:l$, so entsteht eine schwingende Bewegung zwischen zwei Punkten AA', bei deren Erreichung die in O vorhandene kinetische Energie vollständig in potentielle verwandelt worden ist. Die Amplitudenlagen A, A' bestimmt man, indem man aus Gl. 2 den Wert des Elongationswinkels ermittelt, für welchen $w = 0$ wird. Diesen Wert nennt man den Amplitudenwinkel und den Bogen AO die Amplitude.

Während der Bewegung des Pendels findet ein fortwährender Umsatz von kinetischer und potentieller Energie statt, deren Summe nur allmählich infolge der Widerstände sich vermindert, indem Energie für Überwindung dieser verbraucht wird. Die kinetische Energie ist Null in den Amplitudenlagen der schwingenden Bewegung, bei der Kreisbewegung wird sie nie Null.

Im Grenzfalle $w_0^2 = 4g:l$ erhebt sich das Pendel bis O' und bleibt dort in labilem Gleichgewicht.

Durch die Gleichungen 1 und 2 wird das Problem des mathematischen Pendels noch nicht vollständig gelöst. Diese Gleichungen gestatten zwar zu jeder Elongation die Beschleunigung und Geschwindigkeit des pendelnden Punktes anzugeben, sie lehren aber nicht die Zeit kennen, zu welcher diese Elongation erreicht wird, insbesondere nicht die Dauer eines Umlaufs bez. einer Schwingung. Diese Aufgabe vermag überhaupt die niedere Mathematik nur in dem Falle zu lösen, dafs die Amplitude sehr klein ist, weil die schwingende Bewegung des Pendels um so genauer eine sogenannte harmonische Bewegung wird, je kleiner die Amplitude ist.

34. Die harmonische Bewegung. Wie durch Zusammensetzung zweier geradlinigen Bewegungen eine krummlinige ent-

stehen kann [11, 12], so kann auch umgekehrt jede krummlinige Bewegung in geradlinige zerlegt werden. Zerlegt man die gleichförmige Bewegung im Kreise um O in zwei zu einander senkrechte geradlinige Bewegungen, so wird man auf eine von uns bisher noch nicht untersuchte Bewegungsart geführt, die harmonische Be-

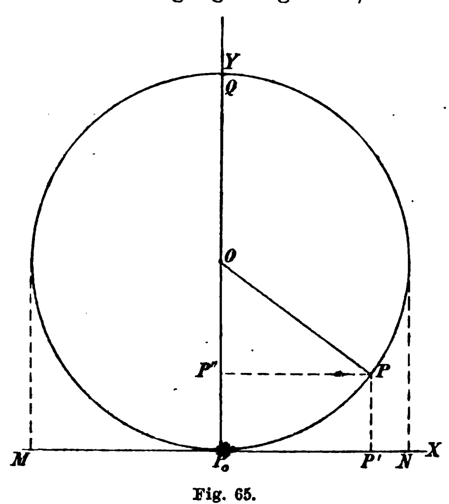


Fig. 65.

wegung. Wir denken uns, die Kreisbewegung des Punktes P um O werde durch zwei Ursachen unterhalten, deren jede allein wirkend ihn zu einer geradlinigen Bewegung veranlaſst hätte, die eine zu einer Bewegung längs P_0X, die andere zu einer längs P_0Y. In dem Momente, wo vermöge der ersteren Komponente die Strecke P_0P', vermöge der zweiten P_0P'' zurückgelegt worden wäre, ist der Punkt in Wirklichkeit in der Lage P, sobald P' und P'' die Projektionen von P auf die gewählten Richtungen der Zerlegung sind.

Da dies für jede beliebige Lage P gilt, so entsteht längs P_0X eine schwingende Bewegung um P_0, die immer zwischen M und N erfolgt, — längs P_0Y eine solche um O, deren äuſserste Lagen P_0 und Q sind. Die besonderen Eigenschaften dieser Bewegungen werden später untersucht werden. Vergl. Kap. XI bis XIII. Jetzt genügt es die Haupteigenschaft nachzuweisen, welche beiden gemeinsam ist.

Die Beschleunigungen beider Bewegungen müssen so beschaffen sein, daſs die aus ihnen resultierende Beschleunigung die Normalbe-

schleunigung des Punktes P ist. Heifst nun T die Umlaufszeit des letzteren, so ist seine Kreisbeschleunigung $(4\pi^2 : T^2) . OP$ und deren Komponenten längs P_0X bez. P_0Y sind

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot P'P_0 \quad \text{und} \quad \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot P''O .$$

Die Beschleunigung jeder der beiden Schwingungen ist also veränderlich, sie ändert sich proportional dem Abstande des schwingenden Punktes vom Bahnmittelpunkte.

Jede geradlinige Bewegung, deren Beschleunigung proportional dem Abstande von einem festen Punkte ist, heisst eine harmonische Bewegung, der feste Punkt ist die Gleichgewichtslage, der Abstand von ihm heifst Elongation. Jede solche harmonische Bewegung läfst sich als Projektion (oder Komponente) einer gleichförmigen Kreisbewegung auf einen Durchmesser betrachten. Die Dauer T der Schwingung (identisch mit der Umlaufszeit der Kreisbewegung) ist so beschaffen, dafs die Beschleunigung der Schwingung das $(4\pi^2 : T^2)$-fache der Elongation ist. —

Nun macht ein mathematisches Pendel um so genauer eine harmonische Bewegung, je kleiner seine Amplitude ist. Da man nämlich bei kleiner Amplitude den Sinus mit dem Winkel, gemessen in Bogenmafs, vertauschen kann, so folgt [33] die Winkelbeschleunigung

$$p = \frac{g}{l} \cdot \varphi$$

für Pendelschwingungen von kleiner Amplitude.

Das ist also die längs der Bahn wirkende Beschleunigung eines Punktes im Abstande 1 vom Aufhängepunkt. Sie ist der Elongation dieses Punktes proportional. Ebenso ist die Beschleunigung des schwingenden Punktes

$$p' = lp = \frac{g}{l} \cdot (l\varphi)$$

der Elongation $l\varphi$ desselben proportional. Die Bewegung dieser Punkte ist daher eine harmonische. Der Proportionalitätsfaktor bestimmt die Schwingungsdauer T

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}$$

$$1. \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Bei Pendeln ist es üblich nicht die Schwingungsdauer, die Zeit eines Hin- und Hergangs, sondern die Dauer einer Halbschwingung, eines Hin- oder Hergangs anzugeben. Sie ist

$$2. \qquad T' = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

So nennt man Sekundenpendel dasjenige, welches zu einer Halbschwingung eine Sekunde braucht, d. h. während eines mittleren Umlaufs der Sonne 24.60.60 Halbschwingungen macht. Seine Länge ist nach Gl. 2 gleich $g : \pi^2$.

Die Schwingungsdauer kleiner Schwingungen ist unabhängig von der Masse des schwingenden Punktes und unabhängig von der Amplitude. Bei Schwingungen mit grofser Amplitude ist letzteres nicht mehr streng der Fall. Die Schwingungsdauer ist gröfser bei gröfserer Amplitude, wie man durch höhere Mathematik finden kann. Nimmt also die Amplitude eines Pendels infolge der Widerstände allmählich ab, so vermindert sich die Schwingungsdauer bis sie schliefslich den durch Gl. 1 ausgedrückten Wert erreicht.

35. Das physische Pendel. Zwei materielle Punkte, die in demselben Punkte A an verschieden langen Fäden aufgehängt

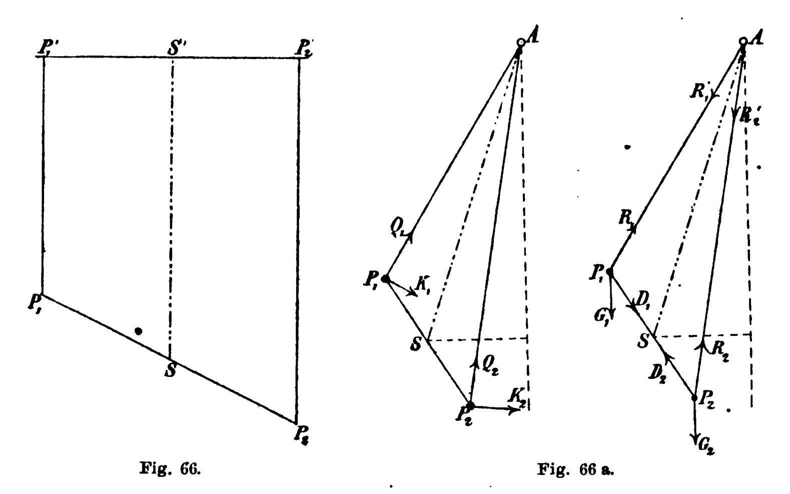


Fig. 66. Fig. 66 a.

sind, brauchen [34] verschiedene Zeit zu einer Pendelschwingung. Sie werden also während des Pendelns ihren gegenseitigen Abstand

verändern. Sind sie durch starre Verbindung daran gehindert, so wird der verhindernde Stab gespannt und gedrückt werden.

Wir denken uns zwei Punkte P_1 und P_2 durch feste Stäbe untereinander und senkrecht mit der Achse A verbunden. Die Massen der beiden Punkte seien m_1 und m_2, die übrige Masse des Gestänges verschwindend gering. Auf P_1 wirken drei Kräfte: seine Schwere $m_1 g = G_1$, die Reaktion R_1 der Stange $P_1 P_1'$ und die Reaktion D_1 der Stange $P_1 P_2$. Die Resultante dieser Kräfte mufs so beschaffen sein, dafs sie dem Punkte P_1 seine Normalbeschleunigung erteilt in der Richtung $P_1 P_1'$ und ferner seine Winkelbeschleunigung in der dazu senkrechten Richtung. Ist also p die Winkelbeschleunigung des Gestänges, w die Winkelgeschwindigkeit desselben, ist ferner $r_1 = P_1 P_1'$, so mufs die Resultante aus G_1, R_1 und D_1 folgende beide Komponenten liefern:

1) längs $P_1 P_1'$ die Kraft $m_1 r_1 w^2 = Q_1$

2) senkrecht $P_1 P_1'$ die Kraft $m_1 r_1 p = K_1$.

Diese beiden und jene drei Kräfte G_1, R_1, D_1 stellen also zwei gleichbedeutende, äquivalente, Kraftsysteme dar, d. h. solche, deren eines das andere ersetzen kann.

Das Entsprechende gilt nun für die in P_2 wirkenden Kräfte, so dafs die sechs Kräfte

$$G_1 \; R_1 \; D_1 \qquad G_2 \; R_2 \; D_2$$

ersetzbar sind durch die vier Kräfte

$$Q_1 \; K_1 \qquad Q_2 \; K_2 .$$

Nun stehen aber D_1 und D_2 im Gleichgewichte [14], also müssen die Kräfte GR ersetzbar sein durch die QK. Um einen analytischen Ausdruck für diese Äquivalenz zu finden, ersetzen wir zunächst G_1 und G_2 durch das im Schwerpunkte S angreifende Gesamtgewicht des Gestänges, dann verlegen wir jede der Kräfte in ihrer Vertikalebene an den Schnittpunkt dieser Ebene und der Drehachse, also z. B. R_1 sowie $Q_1 K_1$ an die Projektion P_1' des Punktes P_1 auf die Achse. Die Verlegungen der Kräfte $K_1 K_2$ erfordern Kräftepaare [25. Üb. 4], deren resultierendes Moment ist

$$K_1 r_1 + K_2 r_2 = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) p .$$

Das Moment, welches die Verlegung des in S angreifenden Gesamtgewichtes fordert, drücken wir aus, indem wir den Schwer-

punktsabstand $S'S = s$ einführen und den während des Pendelns veränderlichen Winkel φ, den diese Linie mit der Vertikalen bildet. Wir erhalten als Moment der Schwere

$$(G_1 + G_2)\, s \sin \varphi .$$

Die Verlegung der übrigen Kräfte $R_1 R_2 Q_1 Q_2$ an die Achse erfordert keine Paare. Somit folgt als die zur Äquivalenz der betrachteten beiden Kraftsysteme notwendige Bedingung

$$(G_1 + G_2)\, s \sin \varphi = m_1 r_1^2 p + m_2 r_2^2 p$$

1. $$p = \frac{(G_1 + G_2)\, s}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2} \cdot \sin \varphi .$$

Liegen P_1 und P_2 in einer Vertikalebene, so ergiebt sich diese Gleichung noch rascher durch Anwendung des Momentensatzes auf die beiden Kraftsysteme.

Die Vergleichung dieser Formel mit [33, Gl. 1] lehrt, dafs sich ein aus zwei Punkten bestehendes Pendel genau so bewegt, wie ein mathematisches, dessen Länge bestimmt ist durch

$$\frac{g}{l} = \frac{(G_1 + G_2)\, s}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

2. $$l = \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{(m_1 + m_2)\, s}.$$

Man nennt diese Länge l die reduzierte Pendellänge des betrachteten Gestänges.

Die an die Achse verlegten Kräfte GR oder QK müssen im Gleichgewichte mit den Lagerreaktionen der festen Achse stehen.

Die bisherige Schlufsweise läfst sich ausdehnen auf ein Pendel, das aus beliebig vielen Punkten besteht, die starr verbunden sind, also auch auf jeden starren Körper. Es tritt dann nur eine gröfsere Anzahl von Reaktionen D auf, die sich jedoch paarweise vernichten. Die Winkelbeschleunigung des physischen Pendels ist also bei dem Elongationswinkel φ

1ª. $$p = \frac{s \,.\, g \Sigma m}{\Sigma m r^2} \sin \varphi$$

und seine reduzierte Pendellänge

2ª. $$l = \frac{\Sigma m r^2}{s \,.\, \Sigma m},$$

daher die Dauer einer Halbschwingung

3ª. $$T' = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{g \, . \, s \, . \, \Sigma m}} = \pi \sqrt{\frac{\mathsf{M}}{G s}}$$

und die Winkelgeschwindigkeit bei der Elongation φ [33. Gl. 2]

4ª. $$w^2 = w_0^2 - 2 \frac{G s}{\mathsf{M}} (1 - \cos \varphi).$$

Hierbei bedeutet s den Abstand des Schwerpunkts vom Aufhängepunkte, G das Gewicht des Pendels, w_0 seine Winkelgeschwindigkeit beim Durchgange durch die Gleichgewichtslage und $\mathsf{M} = \Sigma m r^2$ heifst das Trägheitsmoment bezogen auf die Drehachse A, auch $G s$ das Richtmoment (Direktionsmoment) der Schwere.

Die Formel 4 spricht das Energiegesetz aus. Die Zunahme der kinetischen Energie ist $\frac{1}{2} \mathsf{M} w_0^2 - \frac{1}{2} \mathsf{M} w^2$, wenn das Pendel aus der Elongation φ in die Gleichgewichtslage übergeht. Die potentielle Energie nimmt dabei um $G s (1 - \cos \varphi)$ ab. Nun leisten allerdings noch die Kräfte R und D Arbeit. Aber jene sind normal zur Bahn der Punkte gerichtet, an denen sie angreifen, ihre Arbeit ist daher Null [20, Üb. 5]. Die Kräfte D sind die Kräfte, welche zwischen den Teilen eines starren Körpers wirken, die Kohäsionskräfte. So lange der Körper sich als starr verhält, ändert sich die gegenseitige Lage seiner Teile nicht, die Gesamtarbeit der inneren Kräfte mufs daher verschwinden. Nach dem Energiegesetze ist nun

4ᵇ. $$\frac{1}{2} \mathsf{M} w^2 = \frac{1}{2} \mathsf{M} w_0^2 - G s (1 - \cos \varphi)$$

in Übereinstimmung mit 4ª.

Auch für das physische Pendel gelten die Hauptergebnisse der Theorie des mathematischen Pendels, dafs nämlich die Schwingungsdauer kleiner Schwingungen unabhängig ist von der Amplitude und von den schwingenden Massen. Zwar treten in Gl. 2 die Massen der einzelnen schweren Punkte auf; wendet man aber die Formel auf zwei Pendel an, die beide aus gleichviel gleich angeordneten materiellen Punkten bestehen, so sind deren Trägheitsmomente den Massen proportional, die Schwingungsdauern stimmen daher überein. Ähnliche homogene Körper insbesondere schwingen um ähnlich liegende Achsen mit gleicher Schwingungsdauer, wie grofs auch ihre Dichtigkeit sei.

Dieses Ergebnis der Theorie kann geprüft werden, indem man Kugeln aus verschiedenen Substanzen an gleichlangen Fäden pendeln läfst (Galilei, Bessel). Nun kann man aufserordentlich kleine Unterschiede der Schwingungsdauern mit grofser Schärfe erkennen. Überhaupt gehören die Pendelversuche zu den schärfsten Prüfungen, denen die Grundlagen der Mechanik und die Ansicht über die Wirkungsweise der Schwerkraft unterworfen werden können.

Die weitere wichtige Eigenschaft des Pendels, der Isochronismus kleiner Schwingungen, oder die Eigentümlichkeit, dafs die Schwingungsdauer kleiner Schwingungen von der Amplitude unabhängig (die Schwingungsdauer gröfserer Schwingungen fast unabhängig ist), macht das Pendel zum Regulator der Uhren vorzüglich geeignet. Zu diesem Zwecke ist es von Huyghens 1657 zuerst verwendet worden, dem man auch die Theorie des physischen Pendels verdankt (1673). Die Haupteigenschaften des Pendels hatte vorher bereits Galilei entdeckt.

Anmerkung. Sonnenuhren, Wasser- und Sanduhren (letztere noch beim Loggen benutzt) seit dem Altertum, Räderuhren seit dem Mittelalter (durch Windfang reguliert).

Motor der jetzigen Uhren: Gewicht mit Trommel oder Spiralfeder (Triebfeder) im Federhause.

Regulator: Pendel (Huyghens 1657) oder Spiralfederunruhe (Hooke 1658). Wegen der Abnahme der elastischen Kraft der Triebfeder beim Ablauf der Uhr, läfst man bei gewöhnlichen Taschenuhren den gröfsten Teil der Feder nicht ablaufen, bei genauen Federuhren (Chronometern) aber wendet man Kette (c) und Schnecke (b) an, wodurch bewirkt wird, dafs die schwächere Kraft am längeren Arm angreift.

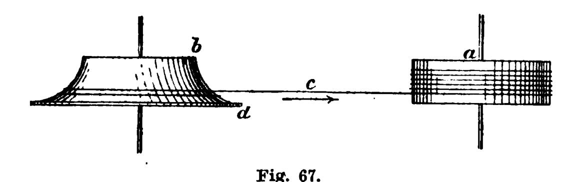


Fig. 67.

Die Bewegung des Motors wird zunächst auf das Steigrad, Hemmungsrad, übertragen, in dessen Zähne der Regulator eingreift.

Nur in der äufserst kurzen Zeit zwischen zwei Eingriffen kann sich das Hemmungsrad drehen und dadurch das weitere Räderwerk und die Zeiger bewegen. Ein Teil der dabei erlangten Energie wird beim nächsten Eingriff dem Regulator erteilt, um dessen Energieverluste zu ersetzen. Die Figur stellt die ruhende Ankerhemmung Grahams dar. Anker O, Steigrad Q; z hat längs bc

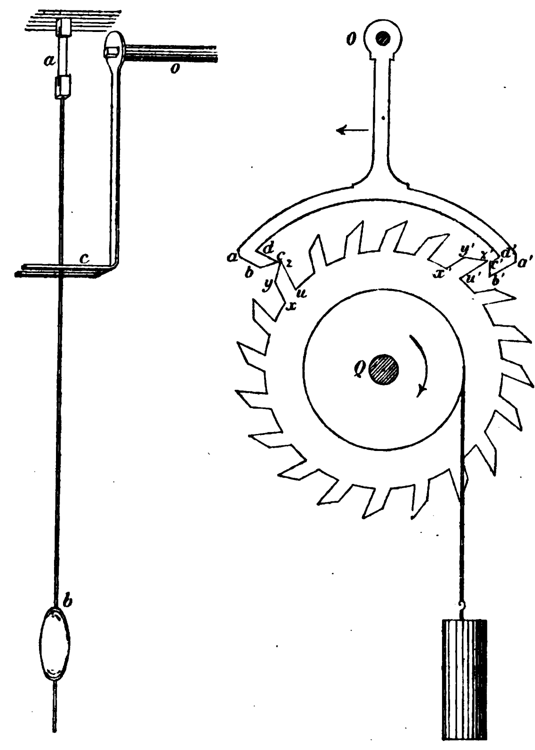


Fig. 68.

gleitend den Anker im Sinne des Pfeiles beschleunigt, trennt sich eben von c, so dafs Anker und Rad frei sich bewegen. Aber schon nach sehr kurzer Zeit fängt $c'd'$ die Kante z'. Der hierbei eintretende Stofs beschleunigt den Anker nicht, weil $c'd'$ eine Cylinderfläche mit der Achse O ist, ebenso wie ab, cd, $a'b'$. Erst beim Rückgang wird der Anker beschleunigt, wenn nämlich z' an $c'b'$ hingleitet. — An der Achse O des Ankers sitzt die Gabel c, deren Arme mit kleinem Spielraume die Pendelstange b umfassen.

So wird es möglich, das Pendel an elastischen Stahlblättchen *a* aufzuhängen. Um gleitende Bewegung zwischen Pendelstange und Gabel zu vermeiden, müssen die Schwingungsachsen beider zusammenfallen.

36. Das Trägheitsmoment eines Körpers sei

$$\mathsf{M}_a = \Sigma m r^2,$$

wenn er sich um eine durch *A* gehende Achse dreht,

$$\mathsf{M}_s = \Sigma m \varrho^2,$$

wenn er sich um eine parallele Schwerachse dreht, so dafs r und ϱ die Abstände eines Massenteilchens m von beiden Achsen bezeichnen. Ist nun s der Abstand dieser beiden Achsen, α der Winkel (s, ϱ), also ein von Massenteilchen zu Massenteilchen verschiedener Winkel, so ist

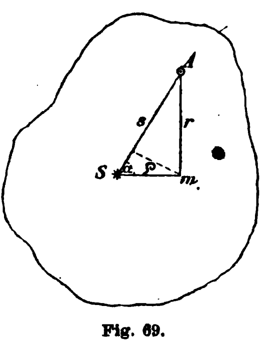


Fig. 69.

$$\mathsf{M}_a = \Sigma m r^2 = \Sigma m (\varrho^2 + s^2 - 2\varrho s \cos\alpha)$$
$$= \Sigma m \varrho^2 + s^2 . \Sigma m - 2 s \Sigma m \varrho \cos\alpha .$$

Denkt man sich alle Schwerkräfte senkrecht zur Ebene der Achsen gedreht, so stellt $\Sigma m g . \varrho \cos\alpha$ die Momentensumme derselben dar bezogen auf die Schwerachse S, ist also Null [27], daher auch $\Sigma m \varrho \cos\alpha$. Bezeichnet man noch die Gesamtmasse des Körpers mit $M = \Sigma m$, so folgt endlich

$$\mathsf{M}_a = \mathsf{M}_s + M s^2 .$$

Unter allen parallelen Achsen ergiebt sich für die Schwerachse das kleinste Trägheitsmoment. Für jede parallele Achse im Abstande s von der Schwerachse ist das Trägheitsmoment um $M s^2$ gröfser als bezogen auf letztere.

Dieser Satz kann benutzt werden, um diejenigen unter den parallelen Achsen anzugeben, um welche schwingend der Stab eine gegebene Halbschwingungsdauer T' zeigt. Der Schwerpunktsabstand dieser Achsen mufs [35. Gl. 3] der Gleichung genügen

$$\frac{T'^2}{\pi^2} = \frac{\mathsf{M}_s + M s^2}{M g s}$$

$$s^2 - g\frac{T'^2}{\pi^2} s + \frac{\mathsf{M}_s}{M} = 0 .$$

Zwei Werte $s_1 s_2$ lassen sich also auffinden für die Abstände derjenigen Achsen vom Schwerpunkt, für welche sich die Halbschwingungsdauer zu T' oder die reduzierte Pendellänge zu

$$l = g T'^2 : \pi^2$$

ergiebt. Die Summe beider Werte ist die reduzierte Pendellänge

$$s_1 + s_2 = l = \frac{g T'^2}{\pi^2}$$

nach einem Satze über die Wurzeln der quadratischen Gleichungen.

Jede Schwerlinie eines Körpers wird von vier Achsen geschnitten, um welche der Körper mit gleicher Schwingungsdauer schwingt. Diese sind paarweis vom Schwerpunkt gleichweit entfernt. Der Abstand von zwei solchen Achsen, die auf verschiedenen Seiten des Schwerpunktes liegen und nicht gleichweit entfernt sind, ist die reduzierte Pendellänge. Der eine dieser Punkte heifst Schwingungspunkt in Bezug auf den andern, den Aufhängepunkt. Ein Körper, den man so eingerichtet hat, dafs man an ihm zwei derartige Achsen gleicher Schwingungsdauer genau ermitteln kann, heifst ein Reversionspendel.

Dasselbe wurde zuerst von Kater 1818 zur Bestimmung von g verwendet, nachdem es Bohnenberger schon 1811 dazu vorgeschlagen hatte. Die Methode hat den Vorteil, dafs man g findet, ohne das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers kennen zu müssen. Dafs dasselbe Pendel an verschiedenen Erdorten eine verschiedene Schwingungsdauer zeigt, hat Richer 1672 bemerkt.

Die Verschiedenheit von g an verschiedenen Erdorten ist aufser für die Zeitmessung auch noch für die Wägung bedeutungsvoll. Versteht man unter 1 kg die Kraft, welche auf der Pariser Sternwarte 1 l Wasser von 4° C nach unten zieht, so ist ein in Paris geaichtes Kilogrammstück nur in Paris 1 kg schwer. Vergleicht man auf einer ebenfalls in Paris geaichten Federwage die Kraft, der es unterliegt, mit der Elasticität einer Feder, so erweist sich jene Kraft nur in Paris als 1 kg, am Äquator geringer, an den Polen gröfser.

Anders als die Federwagen verhalten sich die Gewichtswagen. Ein Körper, der in Paris ein Kilogrammstück im Gleichgewicht hält, thut dies überall, nicht weil er noch so schwer wäre als in Paris, sondern weil das Kilogrammstück in demselben Mafse

schwerer geworden ist als er. Daher mifst die Gewichtswage nicht die von der Erde ausgeübte Kraft, die Schwere; sie mifst vielmehr die Masse des Körpers. Ist diese nämlich M und die des Kilogrammstücks M_0, das Gewicht beider Körper aber $G = G_0$, so folgt $G = G_0 = Mg = M_0 g$, also $M = M_0$, wie grofs auch g sei. Die durch zahllose Versuche mit Gewichtswagen dargethane Unveränderlichkeit des Gewichts der Körperbestandteile bei allen physikalischen und chemischen Veränderungen derselben (Erhaltung des Stoffes) berechtigt daher zur Wahl der Masse als Mafs der Stoffmenge [10].

Anmerkung. In neuerer Zeit definiert man Kilogramm in anderer Weise. Man versteht unter 1 kg die Masse eines Liters Wasser von 4° C.

In diesem sogenannten absoluten Mafssystem wird die Kraft durch kg · m : sec², die Masse durch kg, die Energie durch kg m² : sec² gemessen, dagegen im gewöhnlichen sogenannten Gravitationsmafssystem die Kraft durch kg, die Masse durch kg sec² : m, die Energie durch kg . m. Ist g_p die Beschleunigung der Schwere in Paris, so ist nach der Formel $G_p = Mg_p$

$$1\,\text{kg} = g_p \,\frac{\text{kg m}}{\text{sec}^2}, \quad 1\,\text{kg} = \frac{1}{g_p}\,\frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}},$$

denn das Gewicht des Kilogrammstücks heifst im Gravitationsmafs 1, im absoluten Mafs g_p, die Masse desselben $1 : g_p$ bez. 1.

Die Elektricitätslehre benutzt als Einheit der pro Sekunde geleisteten Energie 1 kg m² : sec³ = 1 Volt-Ampère, die Technik 75 kg m : sec = 1 Pferdekraft.

Übungen.

1. Man stelle sich aus einem dünnen Faden und einem kleinen schweren Körper (z. B. Knopf) ein Pendel her; dasselbe kann man als nahezu mathematisches Pendel betrachten. Wie lang mufs man es machen (vom Aufhängepunkt bis zum Schwerpunkt des Körpers), α) damit es ein Sekundenpendel, β) ein Halbsekundenpendel ist?

2. Welche Abweichung in der Schwingungsdauer erhält man, wenn man die Länge des Pendels, das als Sekundenpendel schwingen soll, α) um 1 mm, β) um 1 cm zu kurz abmifst? Nach wieviel Halbschwingungen des wahren Sekundenpendels ist das falsche ihm um eine Halbschwingung voraus?

3. Die Schwingungszahlen zweier Pendel verhalten sich wie 32 : 57. Nach wie vielen Schwingungen sind beide in nahe gleicher oder in nahe entgegengesetzter Amplitudenlage? (Aufl. Näherungsbrüche der Kettenbruchentwickelung von $\frac{32}{57}$.)

4. Die Längen zweier Pendel verhalten sich wie 3 : 4. Nach wieviel Schwingungen von einer Koinzidenz ab gezählt sind die Pendel wieder nahezu in Koinzidenz und nach wieviel Schwingungen in entgegengesetzter Amplitudenlage?

5. Im Meeresniveau in der Breite φ ist

$$g = 9{,}781 + 0{,}0505 \sin^2\varphi \quad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$$

Man leite daraus her, dafs die Länge des Sekundenpendels ist

$$l = 0{,}9910 + 0{,}00512 \sin^2\varphi \quad \mathrm{m}.$$

Man verwandle beide Formeln in solche von der Form $a + b \cos 2\varphi$.

6. Die Beschleunigung der Schwere nimmt mit je 100 m Erhebung über das Meeresniveau um 0,000 0314 g ab. Um wieviel nimmt dabei die Länge des Sekundenpendels zu?

7. Eine Pendeluhr geht in Paris richtig, d. h. ihr Sekundenpendel macht in Paris 86 400 Halbschwingungen während eines Tages. Wie geht die Uhr am Äquator, am Pol?

8. Eine Uhr geht im Meeresniveau richtig. Wieviel Sekunden täglich geht sie in 8000 m Seehöhe nach?

9. Eine sehr kleine Kugel ist an einem Silberdrahte aufgehängt (Ausdehnungskoefficient $19 \cdot 10^{-6}$). Bei 0^0 schwingt sie als Sekundenpendel. Wie lang ist der Draht, wenn man die Kugel als materiellen Punkt betrachten darf? Wie schwingt das Pendel bei 50^0, 100^0, 500^0 C.? (Notwendigkeit der Kompensation.)

10. Welchen Ausschlag mufs man einem mathematischen Pendel von α) 1 dm, β) 1 m Länge erteilen, damit es die Gleichgewichtslage mit 1 m : sec passiert? Wie bewegt sich das Pendel weiter, wenn dem Faden in halber Länge beim Passieren der Gleichgewichtslage ein Stift in den Weg gehalten wird?

11. Ein Pendel von 1 m Länge schwingt aus einem Amplitudenwinkel von 45^0 abwärts. In der Gleichgewichtslage wird der Faden durchschnitten. Wo trifft der Pendelkörper den Fufsboden, wenn der Aufhängepunkt 2 m über diesem lag? Was würde geschehen, wenn der Faden in Amplitudenlage durchschnitten würde?

12. An einem 0,5 m langen Faden schwingt man in vertikaler Ebene einen Stein von 1 kg im Kreise herum. Welche Geschwindigkeit mufs dieser an der höchsten Stelle der Bahn wenigstens haben, damit dort noch der Faden gespannt ist? Wie grofs ist die Geschwindigkeit des Steins und die Fadenspannung an der tiefsten Stelle der Bahn mindestens?

13. An einem 0,5 m langen Faden schwingt man in vertikaler Ebene einen Stein, so daſs derselbe an der höchsten Stelle der Bahn 2 m Geschwindigkeit besitzt; wieviel hat er an der tiefsten Stelle? Bei Passierung der letzteren wird der Faden losgelassen. Welchen Punkt des Fuſsbodens trifft der Stein, wenn der Mittelpunkt seiner Kreisbahn 2 m über dem Boden lag? Was geschieht, wenn der Faden in der oberen Lage, oder wenn er in horizontaler Lage losgelassen wird? Wo ungefähr muſs er losgelassen werden, um am weitesten geschleudert zu werden? (Schleuder.)

14. Centrifugalbahn. Eine schiefe Ebene geht am unteren Ende in eine vertikale Kreisbahn über, deren Radius r sei. Man beweise, daſs die Höhe der schiefen Ebene gröſser als $2\frac{1}{2} \cdot r$ sein muſs, wenn ein Körper, der von dem höchsten Punkte der schiefen Ebene ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgeht, die Kreisbahn umlaufen soll. (Zur Aufl.: Die kinetische Energie am höchsten Punkte der Kreisbahn muſs so groſs sein, daſs mindestens die Schwere zur Erzeugung der Normalbeschleunigung angewendet wird. Bei gröſserer Energie wird noch die Reaktion der Bahn für diesen Zweck beansprucht.)

15. Eine Person von 70 kg Gewicht sitzt auf einer 3 m langen Schaukel, deren Gewicht gegen das der Person vernachlässigt werden kann. Welche Geschwindigkeit muſs man der ruhenden Schaukel erteilen, damit sie um 45^0 ausschlägt?

16. Welche Mittel wendet man bei Schaukeln an, um sich selbst in Schwingung zu versetzen und worauf beruhen dieselben?

17. Eine Person von 70 kg Gewicht schwingt auf einer Schaukel, deren Gewicht vernachlässigt werden kann. Man gebe für die Gleichgewichtslage, die Elongationswinkel 15^0 und 30^0, sowie für den Amplitudenwinkel 45^0 an: die Winkelbeschleunigung, Kreisbeschleunigung, beschleunigende Kraft, Centripetalkraft, Winkelgeschwindigkeit und Geschwindigkeit. Ferner für die bezeichneten Lagen die potentielle und die kinetische Energie.

Physisches Pendel.

18. An einem Stabe sitzen zwei schwere Körper, der eine von $G = 1$ kg Gewicht im Abstande $r_1 = 3$ dm, der andere $G = 2$ kg im Abstande $r_2 = 5$ dm von der Drehachse. Wie groſs ist die reduzierte Pendellänge, wenn die Körper als Punkte, der Stab als gewichtslos anzusehen? Aufl.:

$$l = \frac{G_1 r_1^2 + G_2 r_2^2}{G_1 r_1 + G_2 r_2}.$$

19. In welchen Abstand r_2' müſste man einen Körper von $G_2' = 1$ kg Gewicht bringen, um G_2 [Üb. 18] zu ersetzen?

20. Der Abstand r_2 [Üb. 18] sei veränderlich und werde mit x bezeichnet, die zugehörige reduzierte Pendellänge mit y. Letztere denke man sich als Ordinate normal zur Abscisse x aufgetragen. Welches ist der geometrische Ort der Ordinatenendpunkte? (Aufl. Hyperbel, eine Asymptote ‖ y, eine unter 45^0 geneigt. Nach Zeuner.)

21. Bei welchem Werte von r_2 [Üb. 18] schwingt das Pendel am raschesten unter allen, die gleiches $G_1 G_2 r_1$ haben? (Minimumaufgabe, z. B. analytisch-geometrisch lösbar nach Üb. 20.)

22. Man lasse ein aus Pappe geschnittenes Rechteck um verschiedene Achsen schwingen, die gleichen Abstand vom Schwerpunkte haben. Es mufs gleiche Schwingungsdauer zeigen, was man durch ein Fadenpendel prüfe. Man ermittele für eine der Achsen den Schwingungspunkt bis auf 5 mm genau, indem man auf einer Schwerlinie des Rechtecks in Abständen von 5 mm Durchbohrungen angebracht hat.

23. Wie kann man das Trägheitsmoment eines beliebigen Körpers nach der Methode des Reversionspendels ermitteln?

23[b]. Man läfst einen Körper um zwei Achsen schwingen, bestimmt die Schwingungsdauern. Wie findet man hieraus sein Trägheitsmoment?

24. Nach Angaben von Veltmann ist die Masse der Kölner Kaiserglocke 36 999 kg (1 kg ist die Masse eines Kilogrammstücks), mit Klöppel 38 097. Die Produkte aus Masse und Schwerpunktsabstand von der Drehachse sind bez. 47 710 und 51 632 kg . m, die Trägheitsmomente bez. 156 833 und 170 672 kg . m². Wie grofs ist der Schwerpunktsabstand von der Schwingungsachse, das Gewicht, die reduzierte Pendellänge und die Schwingungsdauer der Glocke allein sowie der Glocke mit Klöppel (beide starr verbunden gedacht)? Der Versuch ergab 3,282 m als reduzierte Pendellänge.

25. An einem Stabe sitzen zwei Körper von je $G = 1$ kg Gewicht im Abstande $a = 3$ dm. Wie grofs ist Trägheitsmoment, reduzierte Pendellänge und Schwingungsdauer, wenn der Stab um eine Achse pendelt, die $x = 0$, 1, 2, 3, 6, 9 cm vom Schwerpunkte desselben absteht?. (Die Körper sind als Punkte, das Gewicht des Stabes ist als verschwindend zu betrachten.)

26. In den Abständen r_1 und r_2 auf verschiedenen Seiten vom Drehpunkt sitzen auf einem Stabe die Gewichte G_1 und G_2. Man entwickele für diesen Fall die Theorie des physischen Pendels. Metronom.

27. Ein Stab von der Länge l trägt an seinen Enden zwei gleichschwere Körper, die als Punkte zu betrachten sind und so schwer sind, dafs man das Gewicht des Stabes vernachlässigen kann. In welchem Abstand x vom Schwerpunkt liegt die Achse, um die der Stab als Sekundenpendel schwingt? Welcher Bedin-

gung mufs l genügen, damit sich überhaupt auf dem Stabe eine solche Achse findet?

28. Welchen Einflufs hat die Belastung der Wagschalen durch Gewichte auf die Schwingungsdauer der Wage? Welchen Einflufs hat die Länge des Wagbalkens? Warum verzichtet man meistens bei der Konstruktion der Wage darauf, grofse Empfindlichkeit durch lange Wagbalken zu erreichen?

Trägheitsmomente.

•29. Zwei ähnliche homogene Körper aus gleichem Stoffe pendeln um ähnlich liegende Achsen. Wie verhalten sich ihre Massen, Gewichte, Trägheitsmomente, reduzierten Pendellängen und Schwingungsdauern?

30. Das Trägheitsmoment eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipeds kann in folgender Weise ermittelt werden. Es sei $ABCD$ die Basis, h die zur Zeichnungsebene senkrechte Höhe des Parallelepipedes. Man vergleiche nun die Trägheitsmomente M_a und M_s, die der Körper für die in A und S senkrechten Achsen besitzt, mit dem Momente $\mathsf{M}_s' = \mathsf{M}_a'$, das für die zu S bez. A senkrechten Achsen ein ähnliches Parallelepiped hat, welches man erhält, wenn man das gegebene durch die drei den Seiten parallelen Schwerebenen zerlegt. Man findet aus der Definition des Trägheitsmomentes [32] und aus Üb. 29

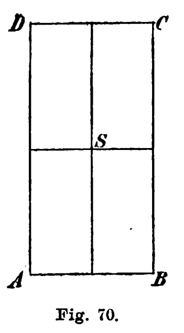


Fig. 70.



$$\mathsf{M}_s' = \frac{1}{8}\,\mathsf{M}_s \qquad \mathsf{M}_a' = \frac{1}{32}\,\mathsf{M}_a.$$

Zwischen M_s und M_a als parallelen Achsen eines Körpers besteht aber eine weitere Gleichung [36], so dafs man M_s oder M_a berechnen kann. Aufl. $\mathsf{M}_s = \frac{1}{12} M \,.\, \overline{AC}^2$ wo M die Masse des Parallelepipeds über $ABCD$. (Nach Clebsch.)

31. Das Trägheitsmoment der Strecke AB bezogen auf die Achse AT ermittelt man durch Teilung der Strecke in n gleiche Teile. Die Punkte z. B. des sechsten Teils (von A ab gezählt) liefern dann zum Trägheitsmomente Beiträge, deren Wert liegt zwischen $(M:n)\,(5l:n)^2 \sin^2\alpha$ und $(M:n)\,(6\,l:n)^2 \sin^2\alpha$. Somit läfst sich das Trägheitsmoment zwischen zwei Grenzen schliefsen, die sich einander beliebig nahe bringen lassen. Aufl. $\frac{1}{3} Ml^2 \sin^2\alpha$.

32. Wie grofs ist die reduzierte Pendellänge für ein homogenes Rechteck, das um eine im Abstande a von seinem Schwerpunkte zu seiner Ebene senkrechte Achse pendelt. (Nach Üb. 30 oder 31.)

Die Magnetnadel.

33. Die Theorie des physischen Pendels zu übertragen auf die Schwingungen einer Deklinationsnadel unter dem Einfluſs des Erdmagnetismus. [Vergl. 30, Üb. 22 ff.)

34. Dasselbe für die im magnetischen Meridian schwingende Inklinationsnadel. Wie bestimmt man die Inklination durch Beobachtüng der Schwingungsdauern, welche dieselbe Nadel als Deklinations- und als Inklinationsnadel schwingend zeigt?

35. An zwei Erdorten schwingt dieselbe Deklinationsnadel mit verschiedenen Schwingungsdauern t und t'. Wie verhalten sich die Horizontalintensitäten HH' des Erdmagnetismus an beiden Orten? (Die Formel gilt nicht nur für den Erdmagnetismus, sondern für die Intensität jedes magnetischen Feldes, wenn die schwingende Nadel so kurz ist, das längs derselben diese Intensität als konstant angesehen werden darf.)

36. Gauſs fand am 11. September 1832 in Göttingen, wo das Sekundenpendel 994,126 mm, die Halbschwingungsdauer eines Magnetstabes 15,245 15 sec. Bei Belastung des Stabes mit zwei Gewichten, deren jedes 103,2572 g wog, erhielt er andere Schwingungsdauern. Hingen die Gewichte von der Schwingungsachse entfernt

180 130 80 30 mm,

so ergab sich die Halbschwingungsdauer

24,657 17 20,792 28 17,686 10 15,829 58 sec.

Aus jeder der letzteren Beobachtungen und der Beobachtung des unbelasteten Stabes folgt das Trägheitsmoment des Stabes sowie das von der Erde auf ihn ausgeübte Richtmoment. (Wüllner.)

Aufl. 1) Richtmoment 18,3 g . mm oder $180 \cdot 10^6 \text{mm}^2 \text{mg} : \text{sec}^2$
2) Trägheitsmoment 431 g . sec^2 mm oder $4230 \cdot 10^6 \text{mm}^2 \text{mg}$.

Absolutes und Gravitationsmaſssystem.

37. Beim Kaufe fast jeder Ware kommt es auf Erwerbung einer bestimmten Stoffmenge, nicht auf Erwerbung von Schwerkraft an. Wenn nun alle Waren nach Federwage ausgewogen würden und das Kilogramm einer Ware in Paris 10 ℳ kostet, was müſste man am Äquator, was an den Polen für 1 kg zahlen, vorausgesetzt daſs der Stoff selbst überall gleichen Wert besitzt?

38. In Paris reiſse eine Kette von gewisser Stärke, wenn sie mit 1 t belastet wird. Wieviel kg, auf Gewichtswage gewogen, kann sie am Äquator, wieviel an den Polen tragen?

39. Auf Jupiter ist die Schwere etwa $2\frac{1}{2}$ mal so groſs, als auf der Erde. Man gebe Erscheinungen an, die sich dort anders zutragen, als bei uns, übrigens gleiche Umstände vorausgesetzt.

VIII. Die Bewegung starrer Körper im Allgemeinen.

37. Der Satz vom Schwerpunkt. Um einen ruhenden Körper in der beliebig kurzen Zeit t in eine fortschreitende Bewegung von der Geschwindigkeit v zu versetzen, müssen allen Punkten desselben in dieser Zeit gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeiten v erteilt werden, was gleiche und gleichgerichtete Beschleunigungen $v:t$ erfordert, wenn während der kurzen Zeit t die Beschleunigung unverändert erhalten werden soll. Auf jeden Punkt mufs also eine Kraft wirken $mv:t$, wenn m die Masse dieses Punktes ist. All diese parallelen Kräfte sind den Massen proportional, an denen sie angreifen, ihre Resultante $\Sigma m \,.\, (v:t)$ geht daher durch den Schwerpunkt, den Massenmittelpunkt, des Körpers.

Umgekehrt läfst sich jede Kraft P, die durch den Schwerpunkt eines starren Körpers geht, in unzählige Parallelkräfte zerlegen, welche an den einzelnen Massenpunkten des Körpers angreifen und diese Kräfte sind den Massen proportional, an denen sie wirken. Ist $M = \Sigma m$ die Gesamtmasse des Körpers, so ist $P:M$ die von der Kraft P erteilte Beschleunigung der fortschreitenden Bewegung.

Jede nicht durch den Schwerpunkt gehende Kraft kann an ihn mit Hülfe eines Paares verlegt werden [25, Üb. 4], bewirkt also erstens eine fortschreitende Bewegung und zweitens die vom Paare erzeugte Bewegung. Diese kann nur eine Drehung sein, da ein starrer Körper einer anderen Bewegungsart nicht fähig ist, als der fortschreitenden und der drehenden und sonst eine drehende Bewegung überhaupt nicht existieren könnte.

Hieraus folgt:

Kräfte, die durch den Schwerpunkt gehen, erzeugen fortschreitende Bewegungen. Der Schwerpunkt bewegt sich dann so, als wäre er allein vorhanden und in ihm alle bewegte Masse vereinigt.

Insbesondere folgt aus dem Satze vom Schwerpunkt, dafs, wenn keine Kräfte wirken, der Schwerpunkt sich nur geradlinig gleichförmig bewegen kann.

Ist die Resultante der auf einen ruhenden Körper wirkenden Kräfte 0, so ist fortschreitende Bewegung ausgeschlossen, wirkt auch kein Paar, so ist Drehung ausgeschlossen. Hiernach lassen sich die bei den Übungen der Kapitel V. und VI. aufgestellten

Gleichgewichtsbedingungen deuten als Bedingungen für die Unmöglichkeit einer Form der Bewegung.

Die drehende Bewegung, welche von einem Kräftepaare hervorgebracht wird, läſst sich mit elementaren Hülfsmitteln im Allgemeinen nicht bestimmen. Vor allem ist die Ebene des Paares im Allgemeinen nicht Ebene der Drehung, wie das Beispiel des Kreisels lehrt. In einigen besonderen Fällen läſst sich jedoch die Rotationsbewegung näher bestimmen. Dreht sich z. B. ein homogener Rotationskörper um seine geometrische Achse mit der Winkelbeschleunigung $\varkappa$, so finden sich auf jeder durch die Achse senkrecht gezogenen Geraden in gleichem Abstande r zwei Punkte gleicher Masse m. Beide unterliegen der Beschleunigung $r\varkappa$, auf jeden wirkt eine Kraft $mr\varkappa$ und diese beiden Kräfte bilden ein Paar vom Moment $2\,mr^2\varkappa$. Die auſserdem noch wirkenden Centripetalkräfte heben sich auf. Die Kräfte nun, welche auf alle Punkte des Rotationskörpers wirken, geben ein resultierendes Paar $\varkappa\Sigma mr^2 = \mathsf{M}\varkappa$, wo M das Trägheitsmoment bezogen auf die Drehachse. Dieses resultierende Paar liegt in einer zur Drehachse senkrechten Ebene. Wirkt daher in dieser ein Paar, dessen Moment K ist, so entsteht eine Rotation um die geometrische Achse mit der Winkelbeschleunigung $\varkappa = K : \mathsf{M}$.

38. Das Energiegesetz für starre Körper. — Die kinetische Energie eines starren Körpers ist die Summe der kinetischen Energieen seiner Teile. Bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v fortschreitend, so ist $\Sigma\,\frac{1}{2}mv^2$ seine Energie, wenn die Summation über alle Punkte erstreckt wird. Ist $M = \Sigma m$ die Gesamtmasse des Körpers, so folgt $\frac{1}{2}Mv^2$ als kinetische Energie.

Ebenso findet sich die kinetische Energie des mit der Winkelgeschwindigkeit w rotierenden Körpers gleich $\Sigma\,\frac{1}{2}mr^2w^2$, wo r der Abstand eines Punktes von der Drehachse. Bezeichnet M das Trägheitsmoment des Körpers, bezogen auf letztere, so folgt als kinetische Energie $\frac{1}{2}\mathsf{M}w^2$.

Jeder Punkt eines Körpers, der sich sowohl fortschreitend mit der Geschwindigkeit v, als drehend mit der Winkelgeschwindigkeit w bewegt, hat die Energie

$$\tfrac{1}{2}m(v^2 + r^2w^2 + 2\,v'\,.\,rw\,.\,\sin[r,\,v'])$$

wobei r den Abstand des Punktes von der Drehachse, $[r, v']$ den

Winkel bedeutet, den die Gerade, auf der dieser Abstand gemessen wird, mit der Projektion v' von v auf die zur Drehachse senkrechte Ebene bildet. Die kinetische Energie des ganzen Körpers, der die Masse M und bezüglich seiner Drehachse das Trägheitsmoment M besitze, ist dann

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 + \tfrac{1}{2} \mathsf{M} w^2 + v' w \Sigma mr \sin(r, v').$$

Ist die Drehachse Schwerlinie, so verschwindet das letzte Glied, weil dann die Gröfse $\Sigma mr \sin(rv')$ Moment des Körpers bezogen auf eine Schwerebene wird. Hat ein Körper eine fortschreitende Bewegung mit der Geschwindigkeit v und dreht sich um eine Schwerlinie mit der Winkelgeschwindigkeit w, so besitzt er in diesem Augenblicke die kinetische Energie

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 + \tfrac{1}{2} \mathsf{M} w^2$$

unter M seine Masse verstanden, unter M sein Trägheitsmoment bezogen auf jene Drehachse.

Die Zunahme, welche die kinetische Energie in irgend einem Zeitraum erleidet, gleicht aber der inzwischen auf alle Punkte des Körpers geleisteten Arbeit. Bei der Berechnung der letzteren hat man zu bedenken, dafs die Arbeit jeder Reaktion verschwindet, da die Reaktion senkrecht zur Bahn steht. [20, Üb. 5.] Auch die zahllosen Kräfte, welche die einzelnen Teile des starren Körpers zusammenhalten, die Kohäsionskräfte, leisten Arbeiten, deren Summe verschwinden mufs, da die gegenseitige Lage der Punkte, zwischen denen sie wirken, sich nicht verändert. Sie brauchen also bei Berechnung der Arbeit nicht berücksichtigt zu werden.

39. Die Maschine. Jede Verbindung von Körpern, durch welche eine Naturkraft genötigt werden kann zu bestimmten Zwecken, d. h. unter Einhaltung bestimmter Bewegungszustände, Arbeit zu leisten, nennen wir eine Maschine. Eine Maschine besteht daher aus Vorrichtungen, durch welche ein Körper zu bestimmten Bewegungen genötigt, also einem Zwange unterworfen wird. Solche Vorrichtungen heifsen Mechanismen. Die Körper, welche sie bilden, sind paarweis so verbunden, dafs wenn der eine ruht, der andere nur eine bestimmte Bewegung auszuführen vermag. Zwei solche Körper heifsen ein Elementenpaar. Die drei einfachsten Elementenpaare sind

Das Prismenpaar, das nur fortschreitende Bewegung gestattet (Kolben im Cylinder).

Das Drehkörperpaar, das nur Rotation gestattet (Welle und Lager).

Das Schraubenpaar, das Schraubung gestattet (Schraube und Mutter).

So besteht z. B. der Kurbelmechanismus, welcher die hin- und hergehende Bewegung des Kolbens der Dampfmaschine in eine drehende Bewegung umsetzt, aus vier Gliedern, die eine geschlossene Kette bilden: 1. einem unbeweglichen Gliede, zu dem die Stopfbüchse A' des Cylinders und das Lager A der Kurbelwelle zu rechnen ist, 2. der Kolbenstange BB', 3. der Lenkstange CC', 4. dem Kurbelzapfen DD'. Diese Glieder bilden vier Elementenpaare, nämlich ein Prismenpaar $A'B$ und drei Drehpaare, $B'C$, $C'D$, $D'A$.

Fig. 71.

Die von der Maschine verwertete Naturkraft setzt zunächst einen Maschinenteil in Bewegung, den Motor oder Treiber, der durch Mechanismen, welche die Transmission bilden, die beabsichtigte Arbeitsleistung erzeugt. Ist die Bearbeitung eines Körpers beabsichtigt, so bilden das Werkzeug und das Werkstück, d. i. der bearbeitende und der bearbeitete Körper, die Endglieder der Maschine; ist jedoch die Fortbewegung, der Transport, eines Körpers Zweck der Maschine, so sind dieser Körper und seine Führung als die letzten Teile der ganzen Vorrichtung anzusehen.

Die praktisch benutzten Motoren sind Menschen und Tiere, fallende Gewichte, fallendes Wasser, Wind, Wasserdampf und expandierende Gase.

Die Energie des Motors wird nun durch die Transmission in die Energie des Arbeitskörpers verwandelt. Letztere würde ihren höchsten Betrag dann erreichen, wenn weder Energie zur Überwindung nutzloser Widerstände verwendet würde, noch zu nutzloser Beschleunigung der Mechanismen, d. i. zur Erzeugung nutzloser kinetischer Energie. Wird eine Maschine in Bewegung ver-

setzt, so steigert sich demnach erst allmählich die Energie des Arbeitskörpers, da ein Teil der motorischen Energie zur Beschleunigung verwendet wird: Anlauf der Maschine. Hat der Arbeitskörper aber den dem Zwecke der Maschine gemäſsen Bewegungszustand erlangt, so erhält man ihn möglichst gleichmäſsig in diesem Zustande: Arbeitslauf der Maschine. Die Bewegung des Arbeitskörpers ist dann entweder eine gleichförmige (fortschreitend, drehend) oder eine periodische, so daſs nach Ablauf einer Periode alle Teile der Maschine sich in demselben Zustande befinden, wie bei Beginn derselben. Eine solche Periode heiſst ein Kreisprozeſs der Maschine. Die während eines solchen vom Motor geleistete Arbeit wird vollständig vom Arbeitskörper verbraucht, abgesehen von der zur Überwindung nutzloser Widerstände erforderlichen Arbeit. Soll die Maschine zum Stillstande gebracht werden, so hört man mit der Zuführung motorischer Energie auf und läſst die vorhandene Energie zugleich in Überwindung von Widerständen (Bremsen) sich aufbrauchen (d. h. in Wärme verwandeln): Endlauf der Maschine.

Daſs bei Vermeidung aller Widerstände und aller Änderungen der kinetischen Energie die von der Last verbrauchte Arbeit gleich der von der Kraft geleisteten ist, ist ein allgemeiner Satz, der als goldene Regel der Mechanik bereits in den Übungen zu [25] für einzelne Fälle hergeleitet worden ist. Der Satz ist älter als das Energiegesetz, aus dem wir ihn hergeleitet haben, und einer weiten Verallgemeinerung (als Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten) fähig.

Vermischte Übungen.

1. Wie groſs ist die kinetische Energie einer Kegelkugel von 12 cm Durchmesser und dem specifischen Gewichte 1,33, wenn dieselbe mit 2 m : sec fortschreitet und dabei rollt (nicht gleitet).

2. Welchen Zweck erreicht man durch Anbringen eines Schwungrades an einer Maschine, welche Schwankungen der Triebkraft oder der Widerstände ausgesetzt ist? Warum giebt man ihm die Form eines Ringes mit groſsem Radius und verteilt nicht die Masse auf möglichst kleinen Raum? Welche Wirkung übt das Schwungrad beim Anlauf und beim Ablauf der Maschine? Mit Vergröſserung des Schwungradhalbmessers wächst die Gefahr, daſs die Speichen des Rades zerreiſsen; warum?

3. Man gebe für folgende vollständige Maschinen die Funktion der einzelnen Teile an und ihr Verhalten beim An- und Ab-

lauf [39]: Winde für Handbetrieb, Saugpumpe beim Handbetrieb, Windmotor zum Wasserheben, Sägemühle mit oberschlägigem Wasserrad, Uhr mit Gewichtsbetrieb, Lokomotive, Schraubendampfer.

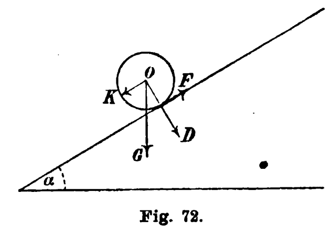


Fig. 72.

4. Eine Kugel vom Radius r und specifischem Gewichte s liegt auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel α ist. Wie grofs ist die Kraft, welche die fortschreitende Bewegung beschleunigt, wie entsteht ein Paar, das auf Drehung wirkt? Durchläuft ein Cylinder vom Radius r die schiefe Ebene ebenso rasch wie eine Kugel?

5. Ein Körper bewegt sich fortschreitend geradlinig mit der Geschwindigkeit c. Die benachbarten Punkte (Atome) A und B desselben ziehen sich mit Kräften P_1, P_2 an, die nach [14] entgegengesetzt gleich sind. Welche Arbeit leistet jede Kraft in der Sekunde, wenn der zwischen v und AB gebildete Winkel α ist? Die Summe beider Arbeiten ist Null.

6. Eine homogene Stange AB von der Länge l dreht sich um einen Endpunkt A mit der Winkelgeschwindigkeit w. Der Punkt X der Stange trifft plötzlich ein Hindernis, so dafs die Stange in der kurzen Zeit t zur Ruhe kommen mufs. Welche Kraft mufs während dieser Zeit auf jeden Punkt wirken, um ihm seine Geschwindigkeit zu nehmen? Welches ist die Resultante dieser Kräfte? Wo mufs X liegen, damit die dort wirkende Reaktion allein jene Resultante hervorbringt (Mittelpunkt des Stofses) und nicht eine Reaktion in A beansprucht wird (Prallen der Hämmer)?

7[a]. Die 9,6 cm Feldkanone wiegt mit Laffete 1200 kg und schiefst 12 kg schwere Granaten und Schrapnels, denen sie 450 m : sec Anfangsgeschwindigkeit erteilt. Die Pulvergase, welche dem Geschosse diese Geschwindigkeit erteilen, wirken mit gleicher Kraft auch auf das Geschütz. Welche Geschwindigkeit erhält dasselbe in der Zeit, in der das Geschofs den Lauf passiert, vorausgesetzt, dafs die Bewegung der Laffete keinen Widerstand findet? (Rücklauf der Geschütze.)

7[b]. Dasselbe für die 40 cm Kanone, deren Gewicht 117 t beträgt und die 775 kg schweren Panzergranaten eine Geschwindigkeit von 500 m : sec erteilt.

8. Zwei ruhende Körper von den Massen M und m werden durch eine zwischen ihnen wirksame Kraft (z. B. gegenseitige Abstofsung, Gasdruck) auseinander getrieben. In der Zeit t erlangen sie durch gleichförmig beschleunigte Bewegung die Geschwindigkeiten V bez. v. Wie grofs ist die Kraft und in welcher Beziehung stehen M, m, V, v? Der Schwerpunkt beider Massen ändert

seine Lage nicht. Diesen Satz zu beweisen und auf den Rücklauf (Üb. 7) anzuwenden (Rakete).

9. Atwood'sche Fallmaschine. An der Schnur hängen links G, rechts $G + K$ Gramm. Nachdem das rechte Schnurende sich h Meter gesenkt hat, ist v die Geschwindigkeit der Gewichte. Wie grofs ist v (durch h ausgedrückt) nach dem Energiegesetze α) ohne, β) mit Berücksichtigung der kinetischen Energie der Rolle, deren Trägheitsmoment $\mathsf{M} = \frac{1}{2} M r^2$ ist, wo M ihre Masse, r ihr Radius? Die Energie des Fadens wird vernachlässigt. Wie grofs ist die Beschleunigung der Gewichte? Beispiele siehe [10 Üb. 4].

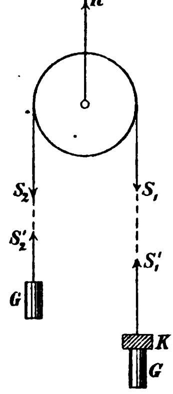


Fig. 73.

10. Dasselbe in anderer Behandlung. S_1 sei die Spannung im sinkenden, S_2 im steigenden Fadenteile. Die unbekannte Beschleunigung der Gewichte mufs dem steigenden Gewichte durch $S_2 - G$, dem fallenden durch $G + K - S_1$ erteilt werden. Endlich mufs $S_1 - S_2$ der Rolle eine solche Winkelbeschleunigung erteilen, dafs die Punkte des Umfangs die Beschleunigung p erleiden. Hieraus folgere man p, S_1, S_2 α) ohne, β) mit Berücksichtigung der Masse M der Rolle.

11. Wie [15 Üb. 10] doch soll die Beschleunigung bestimmt werden, welche eintritt, wenn das Gleichgewicht durch Vermehrung der rechts ziehenden Last gestört wird. α) Ohne, β) mit Berücksichtigung der Reibung.

12. Poggendorff's Fallmaschine. Die Spannungen S' und S berechne wie in Üb. 10. S mufs durch die Gewichte W der Wagschale im Gleichgewicht gehalten werden. Ist $W = G$, so schlägt also die Wage aus, sobald die Fallbewegung beginnt.

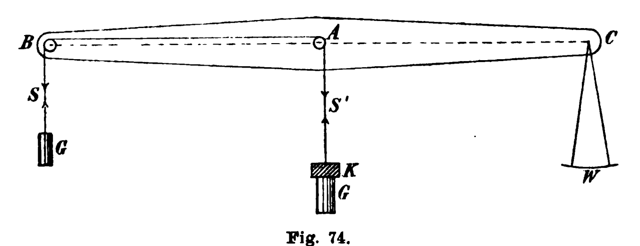


Fig. 74.

13. Wie grofs ist die Reaktion in dem Rollenlager der Atwood'schen Maschine? Hängt man also die Rolle an eine Wage, so verhält sich diese wie die Poggendorff'sche Maschine.

14. Joule liefs einen Kegelstumpf K durch zwei nahezu gleiche fallende Gewichte von G_1 und G_2 g drehen. Davon waren, wie ein besonderer Versuch zeigte, G_0 g erforderlich, um die

Reibung der Rollen zu überwinden. Nun wurde der Kegelstumpf so fest in eine Pfanne *P* geprefst, dafs sich die Gewichte gleichförmig mit der mittleren Geschwindigkeit *v* senkten. Wieviel

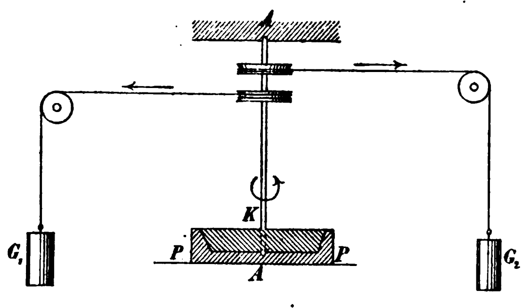


Fig. 75.

Energie ist durch Reibung in Wärme verwandelt worden, während die Gewichte *h* m fielen? Man sieht dabei von der den Rollen und dem Stumpfe erteilten Energie ab.

15. Die Art der Energieverwandlung anzugeben in folgenden Fällen: a) Ein Körper fällt frei; b) er zieht mittels fester Rolle einen gleichschweren empor; c) er zieht mittels fester Rolle einen leichteren empor [Üb. 9]; d) er dreht mittels einer Schnur eine Welle mit Schwungrad um; e) er dreht ein Rad um, das sich im Lager reibt [Üb. 14]; f) der Schwere wirkt Mittelwiderstand entgegen; g) ihr wirkt elektrostatische Kraft entgegen (Elektrophor- oder Wasserinfluenzmaschine von Thomson); h) ihr wirkt magnetische Anziehung entgegen (Eisen fällt in der Nähe eines Magnetpols); i) ihr wirkt elektrodynamische Kraft entgegen (ein Gewicht treibt eine Magnetomaschine um, deren Stromkreis geschlossen ist).

16. Wenn unsere Muskelkraft eine andere Kraft überwindet, verwandelt sich die Energie der Muskeln, aufser in kinetische Energie, in Energie anderer Art. Beispiele für Verwandlung a) in potentielle Energie der Schwere, elektrischer, magnetischer Kräfte, b) in Wärme, c) in elektrische Ladung, (z. B. Elektrophor, Influenzmaschinen), d) in Magnetismus, e) in elektrische Strömung. Was wird schliefslich aus jeder der entwickelten Energieen im Verlaufe der weiteren natürlichen Entwickelung?

17. Man halte eine rechteckige Karte (Spielkarte, Besuchskarte) gegen den Horizont geneigt und lasse sie los. Man suche die auftretenden Bewegungserscheinungen im Allgemeinen zu beschreiben und aus den wirkenden Kräften zu erklären.

18. Aus dem Energiegesetze läfst sich schliefsen, dafs der Gedanke, eine dynamoelektrische Kochmaschine für Handbetrieb zu konstruieren unfruchtbar ist. Man rechne die „Menschenkraft" zu 10 kg m : sec.

Mechanik des elastischen Körpers.

IX. Der elastische Zustand.

40. Die Beanspruchung der inneren Kräfte fester Körper. — Im vorigen Abschnitte [22 bis 39] haben wir die Bewegungserscheinungen starrer Körper untersucht, solcher Körper, die gegenseitiger Verschiebungen ihrer Teile nicht fähig sind. In vielen Fällen kann man feste Körper als starr betrachten [22], d. h. von den Verschiebungen der Teile absehen; im folgenden sollen aber einige derjenigen Fälle behandelt werden, in denen diese Vernachlässigung unzulässig erscheint.

Hängt man beispielsweise an einen mit dem oberen Ende festgeklemmten vertikalen Stab (Draht, Gummischnur) eine Last, so wird derselbe eine Veränderung erfahren. Er wird länger und sein Querschnitt enger, der Stab — sagt man — ist auf Zug beansprucht. Die Erfahrung lehrt, dafs bei wachsender Belastung im Verhalten des Stabes zwei Stadien zu unterscheiden sind.

Im ersten Stadium, dem elastischen Zustande des Stabes, ist die Verlängerung des Stabes proportional der Belastung und mit Aufhören der Belastung stellt sich die frühere natürliche Länge des Stabes wieder her. So verhält sich der Stab so lange die Verlängerung nicht eine gewisse Grenze, die Elasticitätsgrenze für Zug, oder — was dasselbe ist — so lange die Belastung pro Querschnittseinheit nicht ein gewisses Mafs, den Tragmodul für Zug, überschritten hat.

Im zweiten Stadium ist die Verlängerung nicht mehr der Belastung proportional und bei Wegnahme der Belastung geht der Stab nicht mehr auf seine frühere Länge zurück, er hat eine bleibende Veränderung erlitten. Durch die übermäfsige Anspannung ist sein inneres Gefüge verändert worden, es ist ein anderer

Körper aus ihm geworden mit anderen inneren Kräften (Kohäsionskräften) als früher. So verhält sich der Körper, so lange seine Verlängerung nicht die äufserste Grenze, die Festigkeitsgrenze für Zug, oder seine Belastung pro Querschnittseinheit das höchste Mafs, den Festigkeitsmodul für Zug, überschreitet. Geschieht dieses, so wird das Gefüge des Körpers völlig zerstört, die inneren Kräfte völlig überwunden, der Stab zerreifst.

Als Beispiele beachte man u. a. Drähte, Gespinnstfasern, Webstoffe (Kleidungsstücke).

Einer näheren Untersuchung läfst sich nur der elastische Zustand des Körpers unterwerfen. Um die durch eine gegebene Belastung hervorgerufene Verlängerung berechnen zu können, benutzt man den sogenannten Elasticitätskoefficienten. Ist nämlich P die Belastung eines Stabes von der Länge l und dem Querschnitt q, λ die Verlängerung des Stabes, so denke man sich von dem Stabe einen Teil abgegrenzt, dessen Länge die Längeneinheit, dessen Querschnitt die Flächeneinheit ist. Auf diesen Teil entfällt die Belastung $P:q$ und die Verlängerung $\lambda:l$ und da beide proportional sind, so folgt

$$\frac{P}{q} = E \cdot \frac{\lambda}{l}.$$

Der Proportionalitätsfaktor E ist erfahrungsmäfsig nur noch von der Substanz abhängig, aus welcher der Stab besteht, d. h. bei allen Stäben aus derselben Substanz dehnt sich die Längeneinheit um gleichviel aus, wenn die Belastung pro Querschnittseinheit die gleiche ist. E heifst der Elasticitätskoefficient der Substanz und kann als die Belastung bezeichnet werden, welche einen Stab vom Querschnitt 1 um die eigne Länge ausdehnen würde, wenn dies innerhalb der Elasticitätsgrenze geschehen könnte, denn für $\lambda = l$, $q = 1$ folgt $E = P$. Auch kann man das Reciproke von E als diejenige Verlängerung der Längeneinheit auffassen, welche eintritt, wenn die Querschnittseinheit mit der Gewichtseinheit belastet wird. Die Formel darf nur angewendet werden innerhalb der Elasticitätsgrenze, also bis zu einer Verlängerung λ_{max} und einer Belastung P_{max}, welche verknüpft sind durch die Gleichung

$$P_{max} = E \,.\, q\,\frac{\lambda_{max}}{l}.$$

Hat ein Stab durch die Belastung P die Verlängerung λ seiner natürlichen Länge erfahren, ohne die Elasticitätsgrenze zu überschreiten, so bewirkt die plötzliche Entlastung des Stabes ein plötzliches Zurückgehen desselben auf seine natürliche Länge. Dabei leisten die inneren oder Kohäsionskräfte Arbeit, welche sich in kinetische Energie verwandelt. Daher geht der Körper durch seine natürliche Gröfse hindurch und verkürzt sich, bis diese kinetische Energie in Überwindung innerer Kräfte verbraucht ist. Die inneren Kräfte bewirken dann wieder eine Ausdehnung u. s. f. Es tritt also eine schwingende Bewegung der Körperteile um ihre natürliche Gleichgewichtslage ein [vergl. 34], deren Energie erst allmählich durch Widerstände, insbesondere durch die innere Reibung, in Wärme umgesetzt wird.

Die Erzeugung kinetischer Energie und schwingender Bewegungen kann man dadurch vermeiden, dafs man den gespannten Stab nicht plötzlich entlastet, sondern in dem Mafse allmählich, dafs die vorhandene Belastung immer der noch vorhandenen Verlängerung proportional ist, dafs z. B. nachdem der Stab auf $\frac{1}{2}\lambda$ zurückgegangen noch $\frac{1}{2}P$ ihn belastet. Dabei wird $\frac{1}{2}P$ um $\frac{1}{2}\lambda$, ferner $\frac{1}{4}P$ um $\frac{3}{4}\lambda$ u. s. f. gehoben. Die Arbeit der inneren Kräfte wird dann in potentielle Energie der Schwere, statt in kinetische Energie, umgesetzt. —

Die Beanspruchung auf Zug ist als Beispiel für jede Art der Beanspruchung durchgeführt worden. Bei stabförmigen Körpern oder Körperteilen kann man folgende weitere Arten der Beanspruchung unterscheiden. Man denke sich durch zwei parallele einander sehr nahe Querschnitte aus dem Körper ein Stück ausgeschnitten und untersuche, welche gegenseitige Bewegungen der Teile dieses Stückes die auf sie wirkenden Kräfte hervorbringen.

Ist die relative Bewegung der Teile	so ist der Körper beansprucht auf
fortschreitend entlang der Längsachse	1. Zug oder Druck
fortschreitend senkrecht zur Längsachse	2. Abscheerung
drehend um die Längsachse	3. Verwindung (Torsion)
drehend um eine zur Längsachse senkrechte Linie	4. Biegung.

Den relativen Bewegungen der Teile widersetzen sich nun die inneren Kräfte der Schicht, welche wir uns aus dem Körper herausgeschnitten dachten. Man denke sich die Schicht durch Schnitte parallel der Längsachse in kleine Würfel zerlegt. Die äufseren Kräfte suchen diese umzugestalten. Wählt man die Würfel so klein, dafs sie auch nach der Beanspruchung noch als Parallelepipede angesehen werden dürfen, so hat man wieder die obigen vier Fälle als Hauptfälle zu unterscheiden. Denn jeder Würfel wird entweder zu einem recht- (1. 4.) oder zu einem schiefwinkligen (2. 3.) Parallelepiped und beides trifft entweder alle Würfel gleichmäfsig (1. 2.) oder verschieden (3. 4.).

Bei Beanspruchung auf Druck, Biegung (und Zerknicken), Abscheerung und Verwindung oder Torsion wiederholen sich im Allgemeinen dieselben Erscheinungen wie bei Beanspruchung auf Zug, insbesondere verhält sich der Körper bis zur Elasticitätsgrenze so, dafs nach Aufhören der Beanspruchung er seine ursprüngliche Gestalt und Gröfse wieder herstellt, während bei Überschreitung der Elasticitätsgrenze dies nicht der Fall ist. Nur haben für verschiedene Arten der Inanspruchnahme der Elasticitätskoefficient, der Trag- und der Festigkeitsmodul andere Werte.

Übungen.

1. Welche Verlängerung erleidet ein Eisendraht von 2 m Länge und 4 mm Durchmesser bei Belastung mit 100 kg? $E = 2\,100\,000$ kg : cm², Tragmodul $= 2400$ kg : cm².

2. Um wieviel darf sich eine schmiedeiserne Stange von 6 m Länge höchstens ausdehnen, wenn sie nach dem Aufhören der Belastung ihre natürliche Länge wieder herstellen soll? $E = 2\,000\,000$, Tragmodul 1400 kg : cm².

3. Man verwandle Elasticitätskoefficient und Tragmodul des Stahles (2 250 000 bez. 2700 kg pro qcm) in altes Mafs, Pfund pro Quadratzoll.

4. Wie [30 Üb. 13.] Es sei $Q \doteq 10$ t und $\alpha = 60^0$, $\beta = 0^0$ nach Eintritt des Gleichgewichts; wie dick müssen die Balken AC und BC gewählt werden, wenn sie aus Tannenholz ausgeführt werden sollen? ($E = 130\,000$, Tragmodul für Zug 240, für Druck 180 kg : cm²). (Die Balken sind so dick zu nehmen, dafs 1 qcm ihres Querschnitts mit 240 bez. 180 kg beansprucht

wird). Um den wievielsten Teil ihrer Länge haben sich die Balken ausgedehnt bez. verkürzt? (Berechnet ohne Sicherheitskoefficient.)

5. Wie hoch könnte eine Säule aus Ziegelmauerwerk aufgeführt werden, ehe sie unter ihrer eignen Last zerdrückt wird? Festigkeitsmodul 40 kg : cm^2; 1 cbm wiegt 1600 kg.

6. Durch einen Flaschenzug mit sechs tragenden Seilstücken, wie Fig. 32, sollen 30 t gehoben werden. Wie dick mufs man das Seil wählen? Festigkeitsmodul für Hanfseile 300, für Drahtseile 3500 kg : qcm.

7. Ein Körper von 10 kg Gewicht hängt an einem 1 mm dicken, 6 dm langen Stahldraht und wird als Centrifugalpendel um eine vertikale Achse geschwungen. Bei welcher Umdrehungszahl und Winkelgeschwindigkeit reifst der Draht? Vergleiche Fig. 59.

8. Ein Kupferstab von 1 cm Dicke, 1 m Länge wird von 0^0 auf 100^0 erwärmt. Um wieviel dehnt er sich aus und welche Belastung wäre erforderlich, um zu verhindern, dafs er sich bei Abkühlung wieder zusammenzieht? $E = 10\,000$, Tragmodul 12, Festigkeitsmodul 42 kg : mm^2. Ausdehnungskoefficient 0,000 017.

9. Ein Eisenstab von 3 cm Dicke, 4 m Länge wird auf beginnende Rotglut (500^0) erhitzt und so mit zwei gegenüberstehenden Mauern verankert. Um wieviel nähern sich diese und mit welcher Kraft? $E = 20\,000$, Tragmodul 14 kg : mm^2, Ausdehnungskoefficient 0,000 012.

10. Um einen regelmäfsig sechseckigen Reif aus Holz von 3 m Umfang ist ein Eisenband von 2 qcm Querschnitt bei 100^0 Temperatur geschmiedet worden, wie um den Radkranz der Reifen. Bei der Abkühlung auf gewöhnliche Temperatur bringen die elastischen Spannungen sechs Kräfte hervor, die an den Ecken angreifend nach innen wirken. Wie grofs ist jede solche Kraft? $E = 20\,000$ kg : mm^2, Ausdehnungskoefficient 1 : 100 000 (Radreifen um Holzräder).

11. Wie lang mufs ein Faden sein, um durch sein eignes Gewicht zu zerreifsen? Gegeben: Feinheitsnummer N d. i. für Streichgarn die Anzahl Meter, die 1 g wiegt, A Festigkeitsmodul, q Querschnitt.

12. Der in Fig. 76. dargestellte Verschlufs für Flaschen besteht darin, dafs ein Porzellanpfropf a den Gummiring b fest auf den Flaschenhals c prefst. Der Druck wird durch einen Draht ausgeübt, der um eine Durchbohrung A des Pfropfens und um den Punkt B des Hebels CBD drehbar ist. Dieser Hebel ist ein um C drehbarer Winkelhebel. Man gebe an, wovon die Spannung

des Drahtes abhängt und drücke sie algebraisch aus, wobei der Hebel CBD als starr angesehen werde.

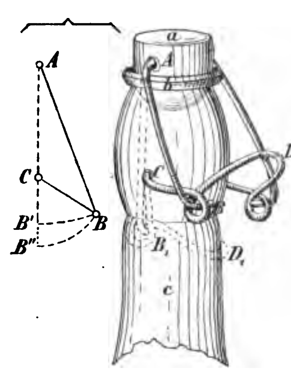


Fig. 76.

13. Ein vertikaler Platindraht von 2 mm Dicke, 4 cm Länge wird durch einen elektrischen Strom plötzlich auf 1000^0 erhitzt. Welche Länge nimmt er an, wenn die Klemmen nachgeben und wie stark wird er gedrückt, wenn die Klemmen feststehen. (Knicken und Brechen der Drähte bei starken Entladungen). $E = 17\,000$ kg : mm², Festigkeitsmodul 34 kg : mm², Ausdehnungskoefficient 0,000 00884.

14. Zwei Stahldrähte von im ungespannten Zustande völlig gleicher Beschaffenheit, 1,000 m lang, 7,622 g schwer, vom spec. Gew. 7,622 und dem Elasticitätskoefficienten 18 809 kg : mm² werden an einem Ende aufgehängt, am andern durch Gewichte belastet, deren Schwerpunkt 1,025 dm unter dem untern Endpunkte der Drähte liegt. Das Gewicht, das den einen Draht spannt, ist 10 kg, das andere 30 kg. — Nun läſst man die Drähte als Pendel schwingen. Welche Schwingungsdauer haben sie, um wieviel eilt täglich das eine dem andern vor? Man betrachte die Pendel als mathematische; die Länge des Sekundenpendels am Orte sei 0,993 509 m, die Temperatur die der Abmessung der Drähte.

X. Der Stoſs.

41. Die Lehre vom Stoſse. — Zwei homogene Kugeln von den Massen M und m, welche sich in derselben Geraden fortschreitend bewegen mit den Geschwindigkeiten C bez. c, treffen aufeinander. Ihre weiteren Bewegungen werden durch die Reaktionen bestimmt sein, die jede auf die andere in der zur Berührungsfläche senkrechten Richtung, also in der Centralen, ausübt. Diese Reaktionen können zwar während der kurzen Zeit des Zusammenstoſses veränderlich sein, aber in jedem Momente sind die beiderseits ausgeübten Reaktionen untereinander entgegengesetzt gleich [14]. Folglich ist auch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsänderung in jedem Momente beiderseits von entgegengesetzt gleichem Werte [10], daher auch das Produkt aus Masse und gesamter Geschwindigkeitsänderung für beide Körper den entgegengesetzt gleichen Wert ergeben muſs. Bewegen sich

daher die Kugeln mit den Geschwindigkeiten V und v auseinander, so mufs sein

$$\text{I.} \qquad M(V - C) = - m(v - c).$$

Beim Stofse ändert sich die Bewegungsgröfse nicht. Die Bewegungen sind wieder fortschreitende [37] und erfolgen in derselben Geraden wie vorher, nämlich der Centrale beider Kugeln.

Die zweite zur Ermittelung von V und v erforderliche Gleichung ergiebt sich aus dem Energiegesetz. Während sich die zusammenstofsenden Körper zusammenpressen, bis sie gleiche Geschwindigkeit besitzen, verwandelt sich ein Teil ihrer kinetischen Energie in potentielle Energie der inneren Kräfte und in Wärme. Nachdem das Maximum der Zusammenpressung erreicht worden, wird im zweiten Stadium des Stofsvorganges eine elastische Ausdehnung der beiden Körper stattfinden, die potentielle Energie und die Wärme sich in kinetische teilweis zurückverwandeln. Das Endergebnis ist, dafs die kinetische Energie sich teils als solche, teils als Wärme wiederfindet. Welcher Bruchteil in der einen, welcher in der andern Form erscheint, das hängt von der Beschaffenheit der zusammenstofsenden Stoffe ab.

Setzen wir 1) voraus, dafs am Ende des Stofses sich kein Verlust an kinetischer Energie, keine Wärmeentwickelung zeigt, dafs der Stofs ein vollkommen elastischer ist, so mufs sein

$$\text{IIa.} \qquad \tfrac{1}{2} MC^2 + \tfrac{1}{2} mc^2 = \tfrac{1}{2} MV^2 + \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Setzen wir dagegen 2) voraus, dafs der Stofs vollkommen unelastisch sei, d. h. dafs die kinetische Energie vollständig in Wärme und innere Arbeit bleibend umgesetzt wird, also eine Wiederausdehnung der Körper überhaupt nicht stattfindet, so besitzen sie nach dem Stofse gemeinsame Geschwindigkeit

$$\text{IIb.} \qquad V = v.$$

Keiner dieser beiden Fälle findet beim Zusammenstofse wirklicher Körper statt, bei jedem Stofse wird etwas Wärme entwickelt, aber es wird nicht ganz die Energie der inneren Kräfte in Wärme verwandelt. Die oben unterschiedenen beiden Fälle sind also als die Grenzfälle anzusehen, zwischen welchen die wirklich stattfindenden Naturerscheinungen liegen.

Die Stadien der Zusammenpressung und der Wiederausdehnung sind durch einen Augenblick geschieden, wo beide Körper

relativ gleiche Geschwindigkeit γ haben. Wenn die im ersten Stadium potentiell gewordene Energie im zweiten wieder kinetisch wird, wie beim vollkommen elastischen Stofse es der Fall ist, so mufs der Geschwindigkeitsabnahme eine gleiche Geschwindigkeitszunahme folgen, d. i.

$$\text{IIIa.} \qquad \begin{gathered} C - \gamma = \gamma - V, \quad c - \gamma = \gamma - v \\ C + V = c + v = 2\gamma. \end{gathered}$$

Die Gleichung $C + V = c + v$ folgt auch aus I. und IIa., den beiden Grundgleichungen des vollkommen elastischen Stofses. Aus diesen Gleichungen kann man γ durch M, m, C, c ausdrücken; man findet dafür denselben Wert, der aus I. und IIb. sich als die beim unelastischen Stofse erlangte gemeinsame Geschwindigkeit ergiebt. D. h.: Beim vollkommen unelastischen Stofse findet nur Zusammenpressung beider Körper statt; die dabei erlangte gemeinsame Geschwindigkeit ist das Endergebnis des Stofses. Beim vollkommen elastischen Stofse folgt der Zusammenpressung ein Stadium der Ausdehnung, ein Prozefs, der als genaue Umkehrung des ersten Stadiums verläuft.

Stofsen die beiden Kugeln nicht wie bisher vorausgesetzt worden, central zusammen, so zerlege man für den Augenblick der Berührung ihre fortschreitenden Geschwindigkeiten in die Centrale und normal dazu. Während die centralen Komponenten die oben eingeführten Cc vorstellen, findet für die normalen eine Beeinflussung während des Stofses überhaupt nicht statt, — von der Reibung an der Berührungsstelle abgesehen.

Die Gesetze des Stofses wurden auf Anregung der Londoner Gesellschaft der Wissenschaften gleichzeitig gefunden von Wallis, Wren und Huyghens 1668. Die beiden letzteren behandelten den elastischen, Wallis den unelastischen Stofs.

Übungen.

1. Gegeben M, m, C, c. Wie grofs sind Vv beim vollkommen elastischen und beim vollkommen unelastischen Stofse? Welche Resultate folgen für 1) $M = m$, 2) $M = m$, $C = -c$, 3) $C = c$, 4) $M : m = \infty$, $C = 0$?

2. Man berechne den Verlust an kinetischer Energie beim unelastischen Stofse.

Aufl.: Derselbe läfst sich nach Carnot in der Form darstellen

$$\frac{1}{2} M (C - \gamma)^2 + \frac{1}{2} m (\gamma - c)^2.$$

Auch kann man dafür setzen

$$\frac{1}{2} \frac{Mm}{M + m} (C - c)^2.$$

3. Zwei Elfenbeinkugeln hängen so an Fäden nebeneinander, dafs sie sich in der Gleichgewichtslage berühren und ihre Centrale dann horizontal ist. Stofsapparat. Sie haben die Massen Mm und werden gehoben um H bez. h, dann losgelassen, so dafs sie als Pendel sich gegeneinander bewegen. Wie verhalten sie sich nach dem Stofse, 1) wenn $M = m$, $H = h$, 2) wenn $H = 0$, $M = m$, 3) wenn $H = 0$, $M = \frac{1}{2} m$, 4) wenn $H = 0$, $M = 2m$ und wenn der Stofs des Elfenbeins als vollkommen elastisch angesehen werden darf, was nahezu — wie die Versuche zeigen — der Fall ist?

4. Wie würden die Lösungen der vorigen Aufgabe lauten, wenn der Stofs vollkommen unelastisch erfolgte, z. B. wenn zwei feuchte Thonklumpen gegeneinander schlügen?

5. Die Formel I. drückt einen wichtigen Satz aus, den Satz von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung. Zwei Kugeln bewegen sich gleichförmig geradlinig. Man zeige, dafs der Schwerpunkt beider Kugeln das gleiche thut 1) wenn beide Kugeln sich in derselben, 2) wenn sie in parallelen, 3) wenn sie in sich schneidenden, 4) wenn sie in sich kreuzenden Geraden fortschreiten. Nun wirke auf eine Kugel eine Kraft. Man gebe die Beschleunigung an, die dadurch der Schwerpunkt beider Kugeln erleidet. Wirken auf beide Kugeln Kräfte, die entgegengesetzt gleich sind, wie Aktion und Reaktion, so wird der Schwerpunkt der Kugeln nicht beschleunigt. Solcher Art sind aber die während der Stofszeit auf die Kugeln wirkenden Kräfte. Formel I. ist daher der Ausdruck eines allgemeinen Naturgesetzes für den besonderen Fall des Stofses. Vergl. [39, Üb. 8.]

6. Zwei gleiche unelastische Kugeln, die mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit central zusammenstofsen, kommen in Ruhe. Zwei gleiche elastische Kugeln gehen im gleichen Falle mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten auseinander. Diese beiden leicht nachzuweisenden Sätze (Üb. 1) können zur Grundlage der Stofstheorie gemacht werden. Haben nämlich zwei gleiche Kugeln beliebige Geschwindigkeiten C, c und stofsen central zusammen, so setze man $C = \gamma + \gamma'$, $c = \gamma - \gamma'$. Die gemeinsame Geschwindigkeit γ wird durch den Stofs nicht verändert, die entgegenge-

setzten Geschwindigkeiten γ' verhalten sich nach Maſsgabe obiger Sätze. Man leite hieraus V und v her für $M = m$. (So verfuhr Huyghens, um die Gesetze des Stoſses herzuleiten).

7. Am Stoſsapparat [Üb. 3.] hängen sechs Kugeln in einer Reihe. Die erste rechts läſst man von der Höhe H gegen die übrigen, die in Ruhe erhalten wurden, herabpendeln. Was thun die übrigen Kugeln α) wenn die Masse einer jeden gleich M; β) wenn die emporgehobene die Masse M hat, die in Ruhe gelassenen aber alle die kleinere Masse m besitzen; γ) wenn umgekehrt die gehobene Kugel kleinere Masse besitzt; δ) wenn die drei Kugeln rechts die Masse M, die links die Masse m haben und $M \gtrless m$ ist? (Fortpflanzung der Energie durch eine Punktreihe, Reflexion). Anleitung: Man denke sich zunächst kleine Zwischenräume zwischen den Kugeln.

8. Ballistisches Pendel (Robins 1742). Ein Körper (Holzpfosten) vom Gewichte P hängt an Ketten. Es stöſst ein anderer Körper (ein Geschoſs) vom Gewichte G mit der Geschwindigkeit C unelastisch gegen ihn und dringt so in ihn ein, daſs beide Körper einen einzigen, ein Pendel, bilden. Um welchen Winkel φ schlägt letzteres aus, wenn es als mathematisches Pendel von der Länge l betrachtet werden kann?

9. Dasselbe als physisches Pendel. — Beim Stoſse hat das Pendel eine Winkelgeschwindigkeit w erhalten. Auf jeden Punkt von der Masse m im Abstand r von der Aufhängeachse, muſs also eine Kraft $mrw : \tau$ gewirkt haben, da er in der Stoſszeit τ die Geschwindigkeitszunahme rw erlitten hat und man annehmen kann, daſs die Zunahme in dieser kurzen Zeit gleichförmig erfolgte. Die Resultante all dieser Kräfte muſs der an der Stoſsfläche wirkenden Aktion gleichen, die wieder der Reaktion auf die stoſsende Kugel entgegengesetzt gleich ist. Der Momentensatz liefert daher

$$w \Sigma m r^2 = -\frac{G}{g}(sw - C)s,$$

wo s der Abstand der Stoſsfläche von der Drehachse und $\Sigma m r^2$ das Trägheitsmoment des ballistischen Pendels. Nun ergiebt sich aber auch w aus dem Ausschlagswinkel φ nach dem Energiegesetze. Man erhält also eine Gleichung zwischen φ und C, der die Form

$$C = \frac{2gT'}{\pi} \cdot \frac{P+G}{G} \cdot \frac{x}{s} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$$

gegeben werden kann, wenn man das Trägheitsmoment durch die Halbschwingungsdauer T' und den Schwerpunktsabstand x des Pendels nach dem Stoſse ausdrückt. (Messung der Geschwindigkeit eines Geschosses.)

10. Versuch von Hirn. Zwei schwere Balken A und B sind so als Pendel aufgehängt, dafs sich in der Ruhelage ihre Stirnflächen so nahe gegenüberstehen, um nur Platz für einen Bleiklotz zu lassen. Der 350 kg schwere Balken B wird um 1,166 m gehoben und dann gegen den an der Stirnfläche von A anliegenden Bleiklotz losgelassen. Nach dem Stofse hebt sich zurückspringend B um 0,087 m, der Balken A aber, der 941 kg wiegt, um 0,103 m. Der Stofs war also weder vollkommen elastisch, noch unelastisch. Wie viel Energie ist in Wärme umgesetzt worden? — Nun wurde die Temperaturerhöhung des Bleistückes bestimmt, indem die Temperatur des Wassers bestimmt wurde, das sich in einem Hohlraum desselben befand. Es ergab sich, dafs 0,660 Kalorien entwickelt worden waren. Wie grofs ist das Wärmeäquivalent? Um wieviel Grad hätte sich die Temperatur des Bleis gehoben, wenn alle Wärme zur Erwärmung des Bleis verwendet worden wäre und welchen Fehler im Wärmeäquivalent macht es aus, wenn die Temperaturerhöhung um $0^0,1$ falsch gemessen wird? Gewicht des Bleiklotzes 2,948 kg, spec. Wärme des Bleis 0,03145. (Wüllner.)

11. Eine kleine Kugel von der Masse m prallt mit der Geschwindigkeit c gegen eine sehr grofse ruhende ebene Wand, die sie unter dem Winkel α gegen die Normale zur Wand (Einfallswinkel) trifft. Wie bewegt sie sich nach dem Stofse, wenn dieser a) vollkommen unelastisch, b) vollkommen elastisch erfolgt und von rotierenden Bewegungen der Kugel abgesehen werden darf? (Reflexion.)

12. Zwei schiefe Ebenen, welche mit dem Horizont den Winkel $\alpha = 30^0$ bilden, stofsen mit den Fufsenden zusammen. Ein Körper, der aus der Höhe $h = 10$ dm die eine herabfällt, stöfst unelastisch gegen die zweite. Wie grofs ist der Energieverlust? Wie hoch steigt er? Bei der Rückbewegung stöfst er wieder gegen die erste Ebene u. s. f. Wie oft wiederholt sich der Stofs, wie lange dauert die Bewegung? Von der Reibung wird abgesehen. Aufl. Die Zahl der Stöfse ist unendlich, die Dauer der ganzen Bewegung $\sqrt{2h:g} \,.\, (\cot^2\alpha : \sin\alpha)$.

13. Zwei gleiche Kugeln stofsen mit gleichen Geschwindigkeiten elastisch zusammen. Ihre geradlinigen Bahnen bilden mit der Centrale im Augenblicke des Zusammenstofses die Winkel α und β (die allen Quadranten angehören dürfen). Wie bewegen sie sich nach dem Stofse? Von rotierender Bewegung der Kugeln soll abgesehen werden.

42. Die kinetische Molekulartheorie. — In den letzten Jahrzehnten hat sich eine zuerst von Clausius 1857 durchge-

führte Hypothese über die innere Beschaffenheit der Körper als äufserst fruchtbar erwiesen. Nach dieser Hypothese sind die Molekeln aller Körper in fortwährender Bewegung begriffen, sie besitzen kinetische Energie. Die Molekeln der Gase üben keine Kräfte aufeinander aus, aufser wenn sie einander sehr nahe kommen; ein jedes bewegt sich daher gleichförmig geradlinig bis es auf eine andere Molekel oder an die Gefäfswand stöfst. Die Molekeln der festen Körper üben starke anziehende Kräfte aufeinander aus, die Kohäsionskräfte, woraus für jede Molekel eine bestimmte Gleichgewichtsstelle folgt; aber die Molekel ruht nicht an dieser Stelle, sie bewegt sich schwingend um sie, wie das Pendel um die Vertikale, weil sie kinetische Energie besitzt. Die flüssigen Körper und Dämpfe vermitteln den Übergang von der eng beschränkten Beweglichkeit der Molekeln fester Körper, zu der nur durch die Gefäfswände beschränkten Beweglichkeit der Gasmolekeln.

Wir verfolgen diesen Gedanken weiter für die Bewegung der Gasmolekeln. Die letzteren betrachten wir als vollkommen elastische Kugeln, so dafs weder beim Stofse zweier im Gefäfse sich bewegenden Molekeln, noch beim Stofse einer Molekel an die unbewegliche Wand kinetische Energie verloren geht. An der Wand befindet sich übrigens eine Schicht von Gasmolekeln, dort festgehalten durch die anziehenden Kräfte der Molekeln, aus denen die Wand besteht. (Hauchbilder.) Hiernach besitzt die betrachtete Gasmasse einen trotz aller Stöfse und dadurch herbeigeführten Bewegungsänderungen doch unveränderlichen Inhalt an kinetischer Energie. Clausius betrachtet nun die im Mittel auf eine Molekel entfallende kinetische Energie als proportional der absoluten Temperatur ($273^0 +$ Celsiustemperatur). D. h. wenn wir fühlen, dafs ein Gas wärmer wird, so nimmt in Wirklichkeit seine kinetische Energie zu; das Gefühl der Erwärmung ist nur in uns, verursacht durch einen Vorgang ganz anderer Art aufser uns, durch Energieveränderung.

Es soll nun gezeigt werden, wie aus diesen Ideen die wichtigsten der für die Gase geltenden Gesetze hergeleitet werden können.

Denken wir uns zunächst, dafs die Bewegung der Gasmolekeln eine vollkommen geordnete sei, so dafs alle Molekeln dieselbe Geschwindigkeit (nach Gröfse und Richtung) besitzen und

sich in gleichen Abständen hinter- und nebeneinander bewegen. Sei m die Masse einer Molekel, c die Geschwindigkeit, α der Winkel, den diese mit der Normalen einer unbeweglichen Fläche von der Gröfse f bildet, endlich d der Abstand zweier hintereinander oder nebeneinander sich bewegenden Teilchen. Dann kann man sich (Fig. 77) den durchströmten Raum in lauter Würfel zerlegt denken, deren jeder eine Molekel enthält. Die Seite eines solchen Würfels ist d. Bei solcher Zerlegung des Raumes zerfällt die Fläche f in Rechtecke von der Gröfse $d^2 : \cos\alpha$.

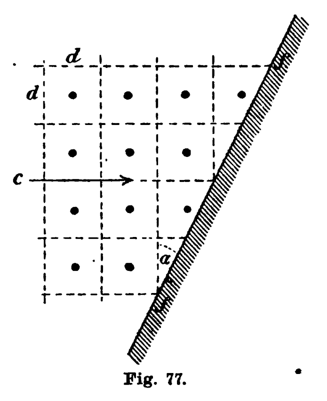


Fig. 77.

Jedes solche Rechteck empfängt in der Sekunde $c : d$ Stöfse, daher die ganze Fläche

$$\frac{f}{d^3}\, c \cos\alpha \text{ Stöfse.}$$

Bei jedem Stofse mufs durch die Reaktion der Fläche die Bewegungsgröfse $mc\cos\alpha$ vernichtet werden und ebenso grofs ist die Aktion gegen die Fläche während der Stofszeit. Daher wirkt auf die Fläche die Kraft

$$m\,\frac{f}{d^3}\, c^2 \cos^2\alpha$$

wenn sich die Stöfse in unmerklich kleinen Zwischenzeiten folgen, und eine ebenso grofse Kraft ist nötig um die Fläche trotz der Stöfse unbewegt zu erhalten. Die Flächeneinheit erleidet hiernach den Druck

$$P' = m\,\frac{1}{d^3}\, c^2 \cos^2\alpha.$$

Da auf den Raum d^3 die Masse m entfällt, so ist $gm : d^3$ das specifische Gewicht S des Gases (Gasdichtigkeit) und da die mittlere kinetische Energie einer Molekel der absoluten Temperatur T proportional sein soll, $\frac{1}{2} mc^2 = kT$, so folgt

$$P' = \frac{2k}{g} \cdot \frac{S}{m} \cdot T \cdot \cos^2\alpha.$$

Nun ändert sich fortwährend der Winkel α, unter welchem der Strom der Molekeln ein kleines Flächenstück trifft. Bei der grofsen Zahl der Molekeln und Zusammenstöfse ist anzunehmen, dafs der Winkel α alle Werte zwischen 0 und 90^0 in sehr kurzer Zeit annimmt und dafs in sehr kurzen Zeiträumen jedes kleine Flächenstück Stöfse aus allen möglichen Richtungen auszuhalten hat. Daraus würde folgen, dafs es denselben Druck auszuhalten hat, wie jedes anders gestellte Flächenstück, was durch die Erfahrung bestätigt wird.

Denkt man sich also drei zu einander senkrechte Flächenstücke von etwa 1 qmm Gröfse an beinahe derselben Stelle, so haben alle drei während der einzelnen Stöfse zwar verschiedene, im Mittel einer Sekunde aber gleiche Kräfte auszuhalten. Durch jede einzelne Strömung, welche mit ihren Normalen die Winkel α, β, γ bilden möge, haben sie aber Kräfte auszuhalten, deren Summe

$$\frac{2k}{g}\frac{S}{m}T(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=\frac{2k}{g}\frac{S}{m}T$$

ist. Somit ergiebt sich der Druck, den ein Flächenstück allein im Mittel einer Sekunde auszuhalten hat, gleich

$$P=\frac{2k}{3g}\frac{S}{m}\cdot T.$$

Der Druck eines Gases ist dem specifischen Gewichte und der absoluten Temperatur proportional, wie es den Gesetzen von Boyle oder Mariotte und von Gay-Lussac gemäfs ist.

Um die Drucke verschiedener Gase vergleichen zu können, setze man die Masse einer Wasserstoffmolekel gleich μ, das Molekulargewicht des betrachteten Gases M, so dafs $M\mu=m$ die Masse einer Molekel dieses Gases ist. Dann folgt

$$P=\frac{2k}{3g\mu}\cdot\frac{S}{M}\cdot T.$$

Bei verschiedenen Gasen von gleichem Druck und gleicher Temperatur sind Molekulargewicht und specifisches Gewicht proportional oder im gleichen Raumteil befinden sich bei allen Gasen gleichviel Molekeln, d. i. das Gesetz von Avogadro.

In den bisherigen Erörterungen ist die Molekel als materieller Punkt gedacht worden, oder doch als ein kleiner elastischer

Körper; streng genommen, hat man sie aber als ein System materieller Punkte oder kleiner Körper, der Atome, anzusehen, die mit einander durch Anziehungskräfte, durch die chemische Affinität, verkettet sind. Die daraus sich ergebenden Folgerungen sollen hier nicht gezogen werden; es sei jedoch darauf hingewiesen, dafs den vorgetragenen Gedanken der kinetischen Molekulartheorie zufolge das molekulare Gefüge als ein Abbild des Weltsystems erscheint, dafs sich in den Bewegungen der Atome und der Molekeln die Bewegungen der Planeten, Trabanten, Kometen und Fixsterne wiederholen, im Mikrokosmos sich der Makrokosmos wiederspiegelt.

Durch die Vorstellungen der kinetischen Theorie ist die Umsetzung der mechanischen Arbeit in Wärme begreiflich gemacht. Wenn, wie beim Hirnschen Versuche [41. Üb. 10], ein Stück Blei gestofsen wird, so wird die kinetische Energie des stofsenden Körpers in kinetische Energie der Bleimolekeln umgesetzt, der Energieverlust des unelastischen Stofses ist nur scheinbar, die verlorne Energie findet sich wieder in molekularer Bewegung. Worin besteht aber der Unterschied, der uns veranlafst die Energie vor dem Stofse als Bewegung, nach dem Stofse als Wärme wahrzunehmen? Nur darin, dafs vorher alle Molekeln gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit, nachher ganz verschiedene Bewegungen besitzen, darin, dafs vorher die Bewegung geordnet, dann ungeordnet erfolgt, abgesehen selbstverständlich von der Wärmebewegung, die schon vor dem Stofse vorhanden ist und durch ihn nicht betroffen wird. Nach der kinetischen Molekulartheorie ist also Wärme die Energie der ungeordneten Bewegung der Molekeln und Atome, ungeordnet in dem Sinne, dafs benachbarte Teilchen nicht gleiche oder nahe gleiche Bewegungen ausführen.

Von diesem Standpunkte können wir noch auf ein Gesetz einen Blick werfen, dessen allgemeine Bedeutung auch von Clausius zuerst erkannt worden ist, das Gesetz der Dissipation der Energie (dissipare zerstreuen). Wenn eine Kugel elastisch gegen einen Haufen von 100 ruhenden Kugeln stöfst, so verteilt sich ihre kinetische Energie auf diese, sie wird auf viele Massenteile zerstreut, hat Dissipation erlitten. Nun würde zwar umgekehrt die Energie jener 100 Kugeln wieder in der einen gesammelt

werden, wenn alle mit Geschwindigkeiten zusammenstiefsen, die denen entgegengesetzt sind, welche sie beim ersten Stofse von der einen erlangt haben. In der Natur wird aber der letztere Zusammenstofs weit seltener eintreten, als der erste; es ist viel unwahrscheinlicher, dafs 100 Kugeln gerade mit solchen Geschwindigkeiten zusammenstofsen, die alle zur Ruhe und nur jene gestofsene Kugel in Bewegung bringen, — viel unwahrscheinlicher, als dafs eine hundert andere in die verschiedensten Bewegungen versetzt. Somit wird im Verlaufe der Naturprozesse die Energie Dissipation erleiden, mehr und mehr zu ungeordneter Bewegung der Molekeln, zu Wärme, werden. Wir kennen z. Z. keine Mittel, die ungeordnete Bewegung der kleinsten Teile wieder vollständig in geordnete Bewegung zu verwandeln, müssen also erwarten, dafs nach und nach alle Energie der Welt in Wärme umgesetzt wird, dafs die ungeordneten Bewegungen zunehmen auf Kosten der geordneten, dafs die Energie der Welt mehr und mehr ihre Verwandlungsfähigkeit einbüfst. (Das Mafs der Verwandlungsunfähigkeit oder Unordnung der Energie, die Entropie, entzieht sich der elementaren Betrachtung.)

Übungen.

1. Man berechne das mittlere Geschwindigkeitsquadrat und die Wurzel daraus (welche nicht etwa die mittlere Geschwindigkeit ist) für die Molekeln der atmosphärischen Luft, des Wasserstoffs, Sauerstoffs, Stickstoffs bei 0^0 und 760 mm Druck. Druck = 1033,298 g : qcm; Spec. Gewicht 1 : 773,532 für Luft; Gasdichte (bezögen auf Luft = 1) für $H = 0{,}06926$, $N = 0{,}97137$, $O = 1{,}10563$. $g = 9{,}806$ m : sec^2. Aufl. Luft 484,914, H 1842,56, N 492,08 O 461,17 m : sec.

2. Wie hat man sich nach den Ansichten der kinetischen Molekulartheorie den Verlauf folgender Erscheinungen zu denken:
Wärmeentwickelung durch Reibung, durch Luftwiderstand,
Wärmeleitung,
Ausdehnung und Aggregationsänderung durch Wärme (äufsere und innere Arbeit),
Absorption der Wärme,
Erwärmung eines Gases durch Kompression,
Prozefs in den Wärmemaschinen, in den Kältemaschinen,
Arbeitsleistung bei Explosionen.

3. Man zeige die Dissipation der Energie bei der Reibung, dem Mittelwiderstand, der Wärmeleitung.

4. Erwärmt man ein Gewicht G eines Gases von T auf T_1 Grad, so vermehrt man die kinetische Energie der Molekeln um

$$E_1 - E = \frac{Gk}{g\mu M}(T_1 - T).$$

Dehnt sich dabei das Gas bei konstantem Druck P um $V_1 - V$ aus, so leistet es die äuſsere Arbeit

$$P(V_1 - V) = \frac{2}{3}\,\frac{Gk}{g\mu M}(T_1 - T).$$

(Man denke sich das Volum V cylindrisch und nur dadurch sich vergröſsernd, daſs sich die obere Endfläche Q um $H_1 - H$ hebt.) Man beweise diese Formeln. Aus ihnen folgere man das Verhältnis der beiden specifischen Wärmen gleich 1,666. Diesen Wert hat das Verhältnis thatsächlich nur beim einatomigen Quecksilberdampf. Bei anderen Gasen wäre die Energie der Atome einer Molekel noch zu berücksichtigen gewesen.

5. Zu den kinetischen Molekulartheorien gehört auch die Ansicht Thomsens, wonach die Wärmeentwickelung einiger chemischen Prozesse nach den Gesetzen des unelastischen Stosses zu bemessen ist. Mischt man Wasser und Schwefelsäure und verbinden sich dabei n Molekeln Wasser mit 1 Molekel Säure, so bewegen sich die Atome dieser $n + 1$ Molekeln nach dem Zusammenstoſse gemeinsam als neue Molekel der Mischung. Hieraus ergiebt sich aber wie beim unelastischen Stoſse, daſs die Energie der Molekularbewegung nach der Mischung geringer ist als vorher. Der Verlust muſs nach auſsen abgegeben werden als Wärme. Man entwickele, daſs der Verlust ist

$$\frac{nb}{n + a}$$

wo a und b Konstanten sind, die von den Massen der Molekeln und ihren Geschwindigkeiten (den Geschwindigkeiten ihrer Schwerpunkte) abhängen. Die Formel schmiegt sich den Beobachtungen gut an, wenn man setzt

$$a = 1{,}8615\,, \quad b = 17\,994\,.$$

Man zeige die Übereinstimmung mit folgenden Beobachtungen:

$n =$	$\frac{1}{8}$	1	5	9	20
Entwickelte Wärme =	1168	6330 6288	12 896 13 112	14 544 14 910	15 560 Calorien

Trotz der Übereinstimmung ist die Hypothese noch nicht als eine berechtigte anzuerkennen, weil es nicht gelungen ist, ihre Prämissen auf eine gröſsere Zahl chemischer Prozesse zu übertragen, auch der Wert von a nicht der Theorie entspricht.

43. — Die Emissions- oder Emanationshypothese. — Newton stellte 1704 zur Erklärung der optischen Erscheinungen eine Hypothese auf, welche besonders durch die Übereinstimmung der Gesetze der Lichtreflexion mit denen des elastischen Stosses nahe gelegt war. Er nahm an, dafs die Lichtempfindung durch kleine Teilchen eines sonst uns unbekannten Stoffes verursacht werde, dafs also das Leuchten eines Körpers seine Fähigkeit sei, derartigen Lichtstoff zu emittieren und dafs die Teilchen dieses Lichtstoffs sich den mechanischen Gesetzen gemäfs als elastische Kugeln bewegen. Daraus ergeben sich leicht die Gesetze der ungehinderten Fortpflanzung des Lichtes und der Reflexion.

Aber schon die Erklärung der Refraktion macht bedenkliche Nebenannahmen erforderlich. Treffen Lichtkörperchen unter dem Einfallswinkel α die ebene Grenzfläche eines Körpers, so bewegen sie sich zwischen seinen Molekeln nicht mit ihrer vorigen Geschwindigkeit c_1 in der vorigen Richtung weiter nach B', sondern mit anderer Geschwindigkeit c_2, kommen also nach einem anderen Punkte B. Um dessen Lage zu bestimmen nimmt man ferner an, dafs bei der Passierung der Grenzfläche die derselben parallele Komponente AC der Geschwindigkeit c_1 unverändert bleibt. An Stelle der zur Grenzfläche normalen Geschwindigkeitskomponente AD' tritt eine andere AD, grofs genug um mit AC zusammengesetzt die Geschwindigkeit c_1 zu geben. Man sieht leicht, dafs dann der Brechungswinkel β bestimmt ist durch

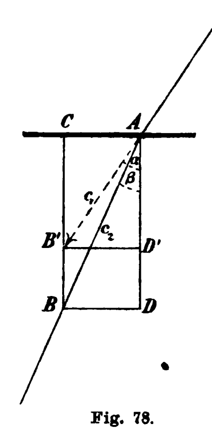


Fig. 78.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_2}{c_1},$$

also das Sinusverhältnis konstant ist, da für alle Richtungen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c_2 und c_1 die gleichen sind. So ergibt sich zwar das Snelliussche Brechungsgesetz aus der Hypothese, aber die Geschwindigkeit c_2 im optisch dichteren Medium mufs gröfser angenommen werden, als im dünneren, und da die optisch dichteren Körper im allgemeinen auch die specifisch dichteren sind, ist dies von vornherein unwahrscheinlich. Es ist aber

auch durch die Versuche, die Foucault 1854 nach der Methode des rotierenden Spiegels ausführte, bewiesen worden, dafs die Lichtgeschwindigkeit im Wasser kleiner ist als die der Luft.

Zur bedenklichsten Nebenannahme wird die Emanationshypothese durch die Thatsache genötigt, dafs an der Grenzfläche zweier Medien Licht gleichzeitig reflektiert und gebrochen wird. Newton schreibt den Lichtkörperchen deshalb Anwandlungen (fits) der Reflexion und Transmission zu, die in kurzen Perioden abwechseln und ist damit im stande, sogar die Erscheinungen der Newtonschen Farbenringe zu erklären.

Die Emissionstheorie ist eines der glänzendsten Beispiele einer bestechenden und doch wertlosen Hypothese. Allmählich erkannte man, dafs sie alle Fehler einer unbrauchbaren Hypothese besafs; sie erwies sich 1) unfruchtbar zur Auffindung neuer Wahrheiten, 2) ungenügend zur Erklärung neuer Erscheinungen, durch eine jede derselben zu Nebenannahmen genötigt, 3) falsch, im Widerspruch mit der Erfahrung, nach Foucaults Versuch. Nachdem sie ein Jahrhundert hindurch fast allgemein anerkannt war, mufste sie der Undulationshypothese weichen.

XI. Schwingungen und Wellen.

44. Die harmonische Bewegung. Wird ein elastischer Körper aus seinem natürlichen Zustande gebracht, ohne dafs die Elasticitätsgrenze überschritten wird, dann aber seinen inneren Kräften überlassen, so macht jeder Punkt des Körpers eine schwingende, oscillierende, vibrierende Bewegung um die ursprüngliche Gleichgewichtslage, d. h. er durchläuft, nachdem ein bestimmtes Zeitintervall, die Schwingungsdauer oder Periode, verflossen, wiederholt dieselben Bewegungszustände. Elastische Körper sind also neben der fortschreitenden und der drehenden Bewegung auch noch dieser schwingenden Bewegung ihrer einzelnen Teile fähig, die jetzt in genauere Betrachtung gezogen werden soll.

Jede schwingende Bewegung, welche durch elastische Kräfte hervorgebracht wird, läfst sich aus harmonischen Bewegungen [34] zusammensetzen. Denn jede einzelne elastische Kraft ist proportional dem Abstande aus der Gleichgewichtslage des Punktes, auf den sie wirkt [40] und bringt daher eine harmonische Bewegung

hervor [34]. Es ist daher vor allem die harmonische Bewegung näher zu untersuchen.

Die harmonische Bewegung ist die Projektion einer gleichförmigen Bewegung im Kreise auf einen Durchmesser [34]. Sie ist daher gegeben durch folgende Bestimmungsstücke:

Gleichgewichtslage und Schwingungsrichtung,
Amplitude,
Schwingungsdauer oder Periode,
Zeit eines Durchgangs durch die Gleichgewichtslage.

Sind diese Stücke gegeben, so findet man den Bewegungszustand des schwingenden Punktes für jede gegebene Zeit 1) geometrisch mittels der Kreisbewegung, von der die harmonische

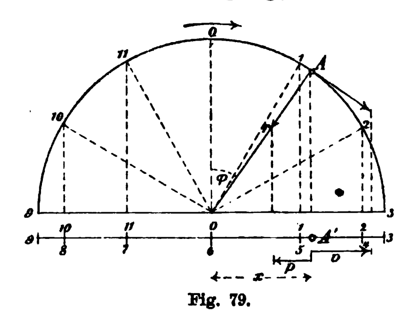


Fig. 79.

Bewegung eine Projektion ist, indem man Radius, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Kreisbewegung projiciert; oder 2) algebraisch durch die folgenden Gleichungen. Man messe die Zeit von der gegebenen Zeit des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage an. t Sekunden nach diesem Durchgange oder zur Phasenzeit t ist

die Elongation $x = r \sin \varphi$,

die Geschwindigkeit $v = \frac{2\pi}{T} r \cos \varphi$,

die Beschleunigung $p = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \sin \varphi = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$

wie bereits [34] angegeben.

Der Hülfswinkel φ heifst die Phase der Schwingung im Momente t. Es ist die Phase [32 Anmerkung]

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} t.$$

Damit folgt

$$x = r \sin \frac{2\pi}{T} t \qquad v = \frac{2\pi}{T} r \cos \frac{2\pi}{T} t \qquad p = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x .$$

Die Haupteigenschaft der Bewegung, periodisch zu sein, wird zum algebraischen Ausdruck gebracht durch das Auftreten periodischer Funktionen, deren Werte in gleicher Folge wiederkehren, wenn sich φ ändert um 2π oder t um T.

Weiſs man, daſs ein Punkt von der Masse m aus seiner natürlichen Gleichgewichtslage um r entfernt wurde, und dann die elastische Kraft P_1 zurückziehend auf ihn wirkt, so ist

$$P_1 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \,.\, m,$$

wodurch T bekannt wird:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{P_1}{mr}}.$$

Der bewegte Punkt ändert während der Schwingung seine kinetische und seine potentielle Energie. In der Gleichgewichtslage ist jene $\frac{1}{2} mr^2 (2\pi : T)^2$, diese 0, in der Amplitude jene 0, diese $\frac{1}{2} mr^2 (2\pi : T)^2$. Um letzteres zu erkennen, trage man in jedem Punkte P' (Fig. 65 auf Seite 99) der Schwingungsbahn die dort wirkende zurückziehende Kraft als Ordinate auf, $P'H = m (2\pi : T)^2 . x$. Während sich der Punkt von P_2' nach P_1' bewegt, wird eine Arbeit geleistet, deren Gröſse zwischen $P_1'H_1 . P_1'P_2'$ und $P_2'H_2 . P_1'P_2'$ liegt. Die gesamte auf dem Wege MP_0 von der elastischen Kraft geleistete Arbeit ist also nach bekannter Schluſsweise gemessen durch eine Dreiecksfläche $H_m M P_0$ oder

$$\frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Da nun die elastische Kraft auf einen durch P_0 gehenden Punkt keine Arbeit leistet, so setzen wir dort die potentielle Energie 0; dann ist sie in der Amplitudenlage $\frac{1}{2} mr^2 (2\pi : T)^2$. Die mittlere potentielle Energie ist endlich

$$\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 mr^2 .$$

Die mittlere kinetische Energie ergiebt sich ebensogroſs aus der Erwägung, daſs sich die konstante kinetische Energie der gleichförmigen Bewegung im Kreise auf die beiden harmonischen

Bewegungen, in die sie zerlegt wird, gleichmäfsig verteilt, da sich die Bewegungszustände in der Horizontalkomponente zwischen P_0 und N ebenso folgen, wie die der Vertikalkomponente zwischen O und Q u. s. f. — Die Gesamtenergie ist fortdauernd die gleiche, wie es dem Energiegesetz entspricht, in der Amplituden- wie in der Gleichgewichtslage und auch im Mittel ist sie

$$2\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 mr^2.$$

Übungen.

1. Man stelle (Fig. 65) die Elongation $x' = OP''$, ebenso die Geschwindigkeit und Beschleunigung der vertikalen Komponente P_0Q als Funktionen von φ und t dar; ferner als Funktionen der Zeit t', gemessen von der Zeit des Durchgangs durch O. Da man letzternfalls dieselben Formeln erhält wie für die horizontale Komponente und $t' = t + \frac{1}{4}T$ ist, so sagt man, dafs die Vertikalkomponente eine harmonische Bewegung sei mit dem Phasenunterschied $\frac{1}{4}T$ gegen die Horizontalkomponente.

2. Es sei $r = 5$ cm, $T = 1$ sec. Man gebe von $\frac{1}{12}$ zu $\frac{1}{12}$ sec Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung geometrisch wie algebraisch an (durch Abmessung, wie durch Berechnung).

3. Man zeichne die Geschwindigkeitskurve der harmonischen Bewegung [9] und entwickele hieraus die Formeln für Beschleunigung und Elongation. (Ellipse.)

4. Gegeben $r = 5$ cm und die im Abstande r zurückziehende elastische Kraft $P_1 = 5$ kg. Die Masse des schwingenden Punktes sei die Masseneinheit. Wie grofs ist die Periode, ferner Elongation, Geschwindigkeit und Kraft von $\frac{1}{16}$ zu $\frac{1}{16}$ Schwingungsdauer?

5. Einem Punkte, der sich in der Gleichgewichtslage befindet, wird eine Geschwindigkeit von 2 m : sec erteilt. Auf ihn wirkt zurückziehend eine Kraft, die das Vierfache der Elongation ist, wenn diese in cm, die Kraft in kg gemessen wird. Wie grofs ist Schwingungsdauer und Amplitude? Welche Arbeit leistet die Kraft bei $\frac{1}{4}$ Periode?

6. Ein elastischer Ball fällt von der Höhe $h = 4$ m auf eine elastische Platte. Es entsteht eine schwingende, aber nicht harmonische Bewegung. Man gebe für diese die kinetische und potentielle Energie in jeder Lage an, sowie die Geschwindigkeitskurve.

Zusammensetzung harmonischer Bewegungen.

Die in den folgenden Übungen behandelten Folgerungen aus der Theorie der harmonischen Bewegung lassen sich experimentell bestätigen durch

1) das Doppelpendel, ein Pendel, das ein zweites Pendel trägt;

2) das Kaleidophon, einen elastischen Stahlstreifen, der mit dem einen Ende eingeklemmt, am andern schwingenden Ende einen zweiten ebensolchen Streifen trägt;

3) die Stimmgabelfiguren von Lissajous.

Man löse die folgenden Aufgaben sowohl durch Konstruktion, wie durch Rechnung (analytische Geometrie).

7. Ein Punkt ist gleichzeitig zu zwei harmonischen Bewegungen genötigt von gleicher Amplitude und Periode, welche ihn in gleichem Momente aus der Gleichgewichtslage nach zu einander senkrechten Richtungen führen. Wie bewegt er sich?

8. Ebenso bei verschiedener Amplitude.

9. Wie Üb. 7, doch ist die Phasendifferenz $\frac{1}{2}\pi$, d. h. wenn der Punkt in der Amplitude der einen seiner harmonischen Komponenten ist, ist er in der Gleichgewichtslage der andern.

10. Auf einen Punkt im Abstande r von der Gleichgewichtslage wirkt die elastische Kraft P. Welche Geschwindigkeit mufs ihm erteilt werden, damit er sich in einem Kreise um seine Gleichgewichtslage bewegt?

11. Wie Üb. 9, bei verschiedener Amplitude. (Ellipse.)

12. Wie Üb. 10, doch soll der Punkt eine Ellipse mit den Achsen r, $\frac{1}{2}r$ beschreiben.

13. Wie Üb. 7, doch ist die Phasendifferenz $\frac{1}{4}\pi$, d. h. der Punkt geht vermöge der einen Schwingung um $\frac{1}{8}$ Periode später durch die Gleichgewichtslage als vermöge der andern.

14. Wie Üb. 9, doch ist die Periode der einen Schwingung doppelt so grofs als die der andern. (Parabel.)

45. Die Wellenbewegung. — Der Beobachtung am leichtesten zugänglich sind die Schwingungen an der Oberfläche der Flüssigkeiten. Die einzelnen Flüssigkeitsteile der Oberfläche machen dabei zwar schwingende Bewegungen, diese sind aber nicht einfache harmonische Schwingungen, sind auch nicht durch Elasticität, sondern durch die Schwere hervorgerufen. Trotz dieser Abweichungen zeigen die Wasserwellen doch eine Eigenschaft sehr schön, die allen Schwingungen gemeinsam ist, nämlich die, sich auf die Nachbarteile zu übertragen, die Fortpflanzung der Schwingungen oder die Wellenbewegung (undulatio). Wird an einer Stelle der Wasseroberfläche die horizontale Gestalt derselben gestört, so erzeugt die Schwere eine schwingende Bewegung an dieser Stelle um die horizontale Gleichgewichtslage. Bald aber stellt sich diese Gleichgewichtslage wieder ein, nicht, weil die

Energie sich in Überwindung von Widerständen verbraucht oder richtiger umgesetzt hätte — das ist bei Flüssigkeiten von geringer Zähigkeit nur mit einem kleinen Teil der Energie der Fall —

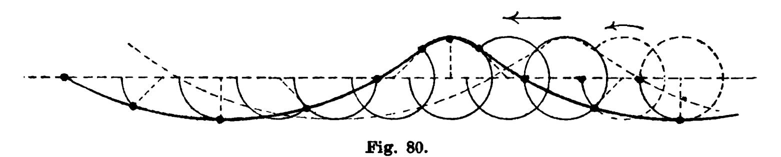


Fig. 80.

sondern vielmehr weil die Energie an benachbarte Wasserteile abgegeben wurde, um nun diese in Schwingungen zu versetzen und von ihnen an weitere Nachbarteile abgegeben zu werden. Die Beobachtung zeigt, wie vom Erregungscentrum aus die Energie nach allen Seiten hin sich auf der Oberfläche fortpflanzt und die schwingende Bewegung sich in immer weiteren Kreisen ausbreitet. Übrigens sei bemerkt, dafs sich die Bewegung auch nach der Tiefe hin fortpflanzt und die Schwingungen der Wasserteilchen an der Oberfläche nahezu in Kreisen erfolgen, deren Ebenen vertikal in Richtung der Fortpflanzung liegen, in der Tiefe in Ellipsen, die mit wachsender Tiefe immer abgeplatteter werden.

Auch die Wellenbewegung eines Seiles läfst sich leicht beobachten. Ein kurzer Ruck (d. i. eine Schwingung) der dem einen Ende eines schwach gespannten Seiles erteilt wird, pflanzt sich durch das Seil von Punkt zu Punkt fort bis ans Ende, wo dann Reflexion eintritt. Immer ist nur eine Stelle des Seiles in schwingender Bewegung und kommt zur Ruhe, indem sie ihre Energie auf die folgende überträgt. —

Wir gehen tiefer auf den hier beobachteten Bewegungsvorgang ein, indem wir uns zunächst die Sache möglichst vereinfachen. Wir denken uns, dafs nur eine geradlinige Reihe von Punkten $OABC$.. vorhanden sei, alle in gleichen Abständen a von einander, dafs alle harmonische Bewegungen von gleicher Amplitude und Periode ausführen und dafs jeder Punkt seine Schwingung um ein bestimmtes Zeitintervall später beginnt als der vorangehende, so dafs sich die Energie mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortpflanzt. Auch soll jeder Punkt nur eine Schwingung ausführen, dann wieder ruhen. Eine derartig vorgestellte Bewegung nennen wir eine einfache Welle in der Punktreihe. Ist die Schwingungsrichtung aller

Punkte normal zur Punktreihe, so nennen wir die Welle transversal, schwingen die Punkte sämtlich in Richtung der Reihe, so heifst die Welle longitudinal. Eine einfache Transversalwelle in der Punktreihe läfst sich veranschaulichen durch Fessels Wellenmaschine, bei welcher Stahlstifte, die an ihrem oberen Ende je eine Perle tragen, so geführt werden, dafs jede Perle eine harmonische Schwingung macht. Einfache Longitudinalwellen in der Punktreihe kann man mit Machs oder mit Weinholds Wellenmaschine vorführen.

Einen mathematischen Ausdruck für beide Arten von Wellen erhalten wir folgendermafsen. In einem bestimmten Momente ist die Elongation:

von O: $y_0 = r \sin \frac{2\pi}{T} t_0$; von A: $y_1 = r \sin \frac{2\pi}{T} t_1$ u. s. f.

wobei t_0 die Zeit ist, gezählt vom Durchgange des Anfangspunktes O durch die Gleichgewichtslage, t_1 die Zeit gezählt von einem späteren Augenblicke ab, nämlich dem Durchgange des Punktes A durch die Gleichgewichtslage u. s. f. Pflanzt sich nun die Energie längs der Punktreihe mit konstanter Geschwindigkeit c fort, so braucht sie $a : c$ Sekunden, um von einem Punkte zum nächsten zu gelangen; jeder folgende Punkt fängt $a : c$ Sekunden später zu schwingen an, als der vorangehende, oder es ist

$$t_1 = t_0 - \frac{a}{c}, \quad t_2 = t_0 - 2\frac{a}{c} \cdot \quad \dots .$$

Für einen beliebigen Punkt N ist daher die Elongation

$$y_n = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t_0 - \frac{na}{c}\right).$$

Diese Erwägungen gelten, wie klein auch a sei. Man kann sich daher so viel Punkte schwingend denken, dafs sich in jedem Abstande x ein solcher vorfindet und hat für diesen beliebigen Punkt der Reihe die Elongation

$$\text{I.} \qquad y = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t_0 - \frac{x}{c}\right).$$

Jeder Punkt der Reihe macht nur eine harmonische Schwingung, wenn der Sinus nur einmal seine sämtlichen Werte durchläuft, d. h. wenn der Winkel nur die Werte von 0 bis 2π annimmt oder wenn $t_0 - (x : c)$ von 0 bis T wächst. Ein bestimmter Punkt

$x = x'$ schwingt dann von der Zeit $x' : c$ bis zur Zeit $(x' : c) + T$, d. h. T Sekunden lang und in einem bestimmten Momente $t_0 = t_0'$ schwingen nur die Punkte von $x = ct_0' - cT$ an bis $x = ct_0'$, d. h. alle Punkte einer Strecke cT. Diese Strecke bezeichnet man als Wellenlänge

II. $$\lambda = cT,$$

d. h. die Wellenlänge ist die Strecke, um die sich die Schwingungsbewegung während einer Periode fortpflanzt. Mit Benutzung dieser Gröfse kann man auch setzen

Ia. $$y = r \sin 2\pi \left(\frac{t_0}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Wenn dem Ausgangspunkt O dauernd Energie dergestalt zugeführt wird, dafs er in schwingender Bewegung bleibt, so bleiben auch alle folgenden Punkte in solcher und es entsteht ein einfacher Wellenzug in der Punktreihe. Für denselben gelten die oben entwickelten Gleichungen, nur ist nunmehr der Sinus nicht auf einmaliges Durchlaufen seiner Werte, der Winkel nicht auf den Bereich von 0 bis 2π beschränkt. Ein bestimmter Punkt $x = x'$ wiederholt seine Bewegung nach jeder Periode T, und zu einer bestimmten Zeit $t_0 = t_0'$ zeigen sich dieselben Elongationen in Abständen von je einer Wellenlänge λ.

Hiernach ist eine einfache Welle, sowie ein einfacher Wellenzug gegeben, wenn aufser den zur Bestimmung der Schwingung eines Punktes der Reihe [44] nötigen Stücken, wozu r und T gehören, noch λ oder c bekannt ist.

Wie die Elongation sich aus diesen Gröfsen für jeden Punkt und jede Zeit auf algebraischem Wege folgern läfst durch obige Formeln, so kann man sie auch auf geometrischem Wege ermitteln, was beispielsweise in Fig. 81 geschehen ist. Es ist $r = 12$, $\lambda = 43$ gemacht, und zunächst sind acht schwingende Punkte auf der Wellenlänge gewählt worden. Durch Vermehrung dieser Zahl kann man sich beliebig dem Zustande einer Reihe nähern, die in jedem Abstande x einen schwingenden Punkt zeigt. Trägt man die Elongationen senkrecht zur Punktreihe auf, so erhält man die transversale Welle, die für zwei Zeitmomente in der Fig. 81 dargestellt ist. Trägt man aber die Elongationen längs der Reihe auf, rechts und links statt wie vorher oben und unten, so entsteht die longitudinale Welle Fig. 82. Einen Wellenzug erhält man,

wenn man die Konstruktion für die weiteren Punkte der Reihe fortsetzt.

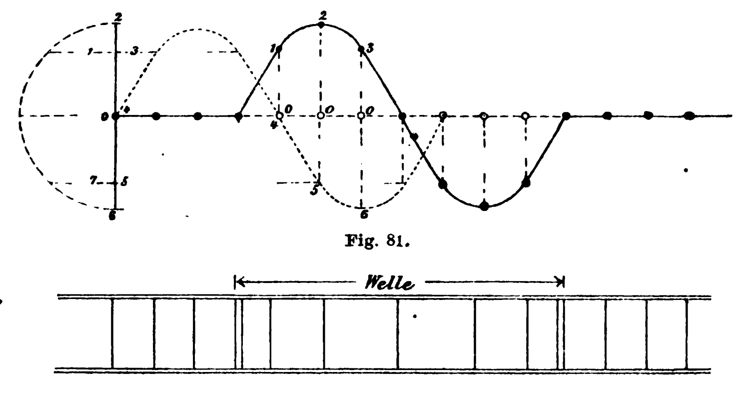


Fig. 81.

Fig. 82.

Während durch die Punktreihe eine Longitudinalwelle fortschreitet, treten in ihr Verdichtungen und Verdünnungen ein. Denn während der natürliche Abstand zweier Punkte der Reihe a ist, ist der Abstand derselben im Zustande der Wellenbewegung

$$a' = a + r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t_0 - \frac{x + \frac{1}{2}a}{c}\right) - r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t_0 - \frac{x - \frac{1}{2}a}{c}\right)$$

$$= a - 2r \cos \frac{2\pi}{T}\left(t_0 - \frac{x}{c}\right) \sin \frac{\pi a}{Tc},$$

wenn x die Entfernung ist, um die im natürlichen Zustande der Mittelpunkt beider schwingenden Punkte vom Anfangspunkte O absteht. Ist nun m die Masse jedes Punktes, so kann man $\mu = m : a$ als die durchschnittliche Masse der Längeneinheit oder Dichte im Gleichgewichtszustande bezeichnen, während

$$\mu' = \frac{m}{a'} = \frac{m}{a} \cdot \frac{a}{a'}$$

diese Masse der Längeneinheit oder Dichte im Bewegungszustande vorstellt. Nun ist

$$\frac{a'}{a} = 1 - \frac{2r}{a} \sin \frac{\pi a}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t_0 - \frac{x}{c}\right)$$

und somit würde man μ' berechnen können.

Wir führen die Rechnung nur für den wichtigsten Fall weiter, daſs a und r sehr klein sind gegen λ. Dann darf man den Sinus mit dem Winkel vertauschen und, höhere Potenzen vernachlässigend, setzen

$$\frac{a}{a'} = 1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t_0 - \frac{x}{c}\right)$$

$$\mu' = \mu\left[1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t_0 - \frac{x}{c}\right)\right].$$

Endlich ist das Verdichtungsverhältnis, d. h. das Verhältnis der Dichtigkeitszunahme zur natürlichen Dichte,

$$\text{III.} \qquad \frac{\mu' - \mu}{\mu} = \frac{2\pi r}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t_0 - \frac{x}{c}\right)$$

und schwankt demnach zwischen $\pm 2\pi r : \lambda$.

XII. Anwendung der Wellenlehre wesentlich auf akustische Erscheinungen.

46. Die Grundlage der Akustik. Eine Wellenbewegung ist auch die Bewegung, welche unsere Gehörsempfindungen verursacht. Die Energie, die in unserem Ohre die Schallempfindung hervorruft, pflanzt sich vom tönenden Körper durch die Luft und andere elastische Körper bis zu unserem Ohre mittels Schwingungen fort. Daſs tönende Körper schwingen, kann man in den meisten Fällen sehen und fühlen; daſs die Fortpflanzung ihrer Energie zum Ohre hauptsächlich durch die Luft hindurch geschieht, beweist der Versuch, wonach eine Glocke unter dem Rezipienten einer Luftpumpe um so schwächer ertönt, je verdünnter die Luft wird; daſs auch andere elastische Körper die schwingenden Bewegungen fortzupflanzen vermögen, kann durch einfache Versuche gezeigt werden (Fadentelephon). Die in der Luft sich fortpflanzenden durch Explosionen verursachten Verdichtungswellen kann man sehen mittels Töplers Schlierenapparat. Wie die Schallwellen der Luft andere Körper in schwingende Bewegung versetzen, läſst sich u. a. zeigen mittels des Phonographen von Edison (und des Phonautographen), bei welchem eine Membran zu Schwingungen erregt wird, die einen Schreibstift trägt, welcher seine Bewegungen in Stanniol eindrückt; — es läſst sich auch zeigen mittels des Telephons von Bell, bei welchem ein Eisen-

blättchen in Schwingungen versetzt wird, die Induktionsströme erregen. Phonograph und Telephon zeigen auch die Umkehrungen der angegebenen Wirkungen; welche der obigen Behauptungen beweisen sie daher auch? Die angeführten und ähnliche Gründe nötigen uns zu folgender Vorstellung: Die Energie des tönenden Körpers wird an die umgebende Luft (und andere elastische Körper) abgegeben und pflanzt sich dann in der Luft durch longitudinale Schwingungen, periodische Verdichtungen und Verdünnungen erzeugend, allseitig fort, so dafs jedes Luftteilchen dieselbe Schwingung macht, wie das vorangehende, nur etwas später dieselbe beginnt, als letzteres.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Longitudinalwellen in der Luft ist durch Beobachtung des Lichtblitzes und des Knalles abwechselnd und gegenseitig abgegebener Kanonensignale bestimmt worden zu 340 m : sec. Das Weitere über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles s. [50].

Dieser Vorgang in der Aufsenwelt erregt in unserm Innern einen Vorgang von ganz verschiedener Art, der Bewegungsvorgang erregt einen Empfindungszustand. Wie in uns diese Empfindung zu stande kommt, wissen wir nicht, wohl aber können wir feststellen, welcher Art die unsern Gehörsnerven treffende Wellenbewegung sein mufs um eine bestimmte Gehörsempfindung hervorzurufen.

Wir können durch verschiedene Instrumente in der Luft Schwingungen von bestimmter Schwingungszahl erzeugen und die dadurch in uns hervorgerufenen Empfindungen beobachten. Solche Instrumente sind vorzüglich die Sirenen, die Sirene von Cagniard de la Tour, die Zahnradsirene von Savart und die Lochsirene von Seebeck. Die durch sie erzeugten Empfindungen sind freilich nicht völlig einfache, sind z. B. von Blasegeräuschen begleitet. Eine völlig einfache Empfindung erhalten wir durch schwach angeblasene Lippenpfeifen oder durch Stimmgabeln mit Resonanzkästen, nachdem die bei der Erregung der Gabeln entstehenden Geräusche verschwunden sind. An einer solchen einfachen, d. h. nicht weiter in Bestandteile zerlegbaren, Empfindung, einem Tone, lassen sich nur die beiden Eigenschaften der Höhe und Stärke des Tones unterscheiden oder Töne können nur in Höhe und Stärke verschieden sein. Mittels der Si-

renen (und Stimmgabeln) lassen sich folgende Sätze nachweisen:

1. Jede einfache Schwingung, die unser Ohr trifft, erregt eine einfache Tonempfindung, vorausgesetzt, dafs die Schwingungszahl zwischen etwa 30 und 45 000 liegt.

2. Je gröfser die Schwingungszahl, um so höher der Ton.

3. Je gröfser die Schwingungsenergie, um so stärker der Ton; die Stärke gleich hoher Töne wächst demnach mit dem Quadrate der Amplitude.

4. Erklingen zwei Töne, ein Intervall, so erzeugen sie uns einen bestimmten Eindruck von ihrer gegenseitigen Beziehung, welcher als Einklang, Oktave, Quinte u. s. f. bezeichnet wird. Dieser Eindruck hängt nur vom Verhältnis der Schwingungszahlen beider Töne ab. Durch je einfachere Zahlen dieses Verhältnis darstellbar ist, um so harmonischer erscheint uns das Intervall.

Dem	Einklang	entspricht	das	Verhältnis	1 : 1
Der	Oktave	„	„	„	1 : 2
„	Quinte	„	„	„	2 : 3
„	Quarte	„	„	„	3 : 4
„	grofsen Terz	„	„	„	4 : 5
„	kleinen Terz	„	„	„	5 : 6

der Schwingungszahl des tieferen zu der des höheren Tons.

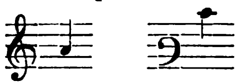
Sucht man zu einem beliebigen Tone, dem Grundtone, die mit ihm in den angegebenen einfachen Intervallen stehenden Töne auf, zu diesen wieder die mit ihnen in denselben Intervallen stehenden höheren oder tieferen Töne, so erhält man zwischen Grundton und Oktave eine endlose Reihe von Tönen. Z. B.

Quarte und grofse Terz gibt grofse Sexte $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5:3$
Quarte und kleine Terz gibt kleine Sexte $\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = 8:5$
Quinte und grofse Terz gibt Septime . . $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = 15:8$
Quinte vermindert um Quarte gibt Sekunde $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = 9:8$ u. s. f.

Auswahlen von acht Tonstufen in der Oktave bilden die diatonischen Tonleitern (Dur und Moll), eine Auswahl von zwölf die chromatische Tonleiter. Statt der aufserdem noch nötigen zahllosen Töne setzt man die nächstliegenden der Tonleiter, temperiert die Töne: reine Temperatur. Ein anderes Verfahren besteht darin, dafs man die Oktave in zwölf gleiche Intervalle teilt und die so erhaltenen Töne zur Skala benutzt.

Dann sind alle Intervalle, aufser denen der Oktaven, falsch: gleichschwebende Temperatur.

5. Nachdem die Schwingungszahl, die einem bestimmten Tone entspricht, festgestellt ist, ist die aller anderen Töne der Reihe bekannt. Es ist üblich die Schwingungszahl für denjenigen Ton festzustellen, der als a' oder a_1 oder



bezeichnet und Kammerton genannt wird. Diese Schwingungszahl ist in verschiedenen Orchestern und zu verschiedenen Zeiten verschieden gewesen (377 bis 567), es ist üblich sie zu 440 zu wählen.

Die Schwingungszahlen, die den in der Musik gewöhnlich benutzten Tönen entsprechen, liegen etwa zwischen 40 und 4000.

6. Den Eindruck, den mehrere gleichzeitig gehörte Töne machen, nennen wir einen Klang (Dreiklang in Dur, in Moll, Akkorde). Die meisten musikalischen Instrumente geben nicht einfache Töne, sondern Klänge, die aus einem Tone, dem Grundtone, und schwächeren Obertönen zusammengesetzt sind, d. h. Tönen, deren Schwingungszahlen das 2-, 3-, 4- . . . fache des Grundtones betragen. Ein feines Ohr hört diese Bestandteile eines Saiten- oder Pfeifenklanges; auch für ungeübte Ohren hörbar werden sie durch Resonatoren (Helmholtz). Dafs also gleichstarke und gleichhohe „Töne“ anders klingen, wenn sie von einer Saite erzeugt werden, als wenn sie von einer Pfeife oder von der menschlichen Stimme u. s. f. hervorgebracht werden — dafs die „Töne“ eine Klangfarbe zeigen, als dritte Eigenschaft neben Höhe und Stärke — kommt daher, dafs diese sogenannten Töne nicht eigentliche einfache Töne, sondern Klänge sind von gleichem Grundtone, aber verschiedener Beimischung von Obertönen, oder dafs die sie erzeugenden Schwingungen nicht einfache harmonische, sondern zusammengesetzte Schwingungen sind.

7. Gehörsempfindungen, die nicht Töne oder Klänge sind, doch oft solche als Bestandteile enthalten, heifsen Geräusche.

8. Die Tonhöhe ändert sich nicht mit der Entfernung, wohl aber die Stärke des Tons, also die Amplitude der Welle.

Übungen.

1. Man gebe die Eigenschaften und die Gleichung der Luftwelle an, die den Ton a_1 (440) erzeugt.

2. Man berechne die Wellenlängen der tiefsten und höchsten überhaupt hörbaren Töne. Ebenso für die musikalisch verwerteten tiefsten und höchsten Töne.

3. Wie grofs sind die Schwingungszahlen, Perioden und Wellenlängen α) aller höheren und tieferen Oktaven des Kammertons, β) aller mit c bezeichneten Töne

$c_{-3} = \underline{\underline{C}} =$ Subcontra-C, $c_{-2} = \underline{C} =$ Contra-C, $c_{-1} = C =$ Grofses C

$c_0 = c =$ kleines C, $c_1 = c' =$ eingestrichenes C, u. s. f.

(Man berechne die C als reine tiefere Sexten oder als kleine Terzen zu A).

4. Der Schüler berechne Schwingungszahlen, Perioden und Wellenlängen für die beiden äufsersten Töne des Umfanges seiner Gesangsstimme oder auch für den Umfang der Männerstimmen e_{-1} bis c_2 und der Frauenstimmen d bis c_3.

5. Wie grofs ist das Intervall zweier sich folgenden Töne der gleichschwebenden Skala? Welches Intervall hat jeder der zwölf Töne zum Grundton? Welche Töne stimmen nahe überein mit denen der diatonischen Durtonleiter Sekunde, gr. Terz, Quarte, Quinte, Sexte, Septime, Oktave und wieviel beträgt der Fehler?

6. Man zeige, dafs die aufeinander folgenden Töne der diatonischen Skala in Intervallen von drei verschiedenen Gröfsen stehen: dem grofsen Ganzton $9:8$, dem kleinen Ganzton $10:9$ und dem grofsen Halbton $16:15$. Der Empfindungsunterschied der beiden Ganztöne, d. i. das Verhältnis $81:80$ ihrer Intervallzahlen, heifst Komma und wird in der Musik als unbeträchtlich behandelt. Wie grofs ist der Unterschied des kleinen Ganztons und grofsen Halbtons, der sogenannte kleine Halbton, wie grofs ist der Unterschied der beiden halben Töne (Üb. 7)?

7. Erhöht man ein Intervall um einen kleinen halben Ton ($25:24$), so erhält man das übermäfsige Intervall (cis, dis u. s. w., Kreuzvorzeichnung), durch eben so grofse Erniedrigung das verminderte Intervall (ces, des, es u. s. w., b-Vorzeichnung). Man gebe die Intervalle der so entstehenden Skala an.

8. Man vergleiche die reinen Intervalle mit den Intervallen der gleichschwebenden Temperatur und gebe die Abweichungen an (5 Decimalen) in folgender Weise:

Ton	Reines Intervall	Gleichschwebendes Intervall	Abweichung
c	1	1	1
cis	$\frac{25}{24} = 1{,}04166$	1,059 46	1,017 08
des	$\frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} = 1{,}08000$		0,980 98
....	....	.... .	....

9. Nach Chladni entstehen die Töne der diatonischen Tonleiter, wenn man den Dreiklang: Grundton, Terz, Quint auf dem Grundton, der Quint und Unterquint aufbaut. Auszuführen. Wählt man zum Dreiklang die grofse Terz, so ergiebt sich die Durtonleiter, aus der kleinen Terz die (absteigende) Molltonleiter.

10. Jeder der beiden Dreiklänge besteht aus den beiden Terzen. Worin besteht der Unterschied? Die Dreiklänge entstehen auch durch das harmonische Mittel aus Grundton und Quint.

11. Welche Töne der Reihe *c cis des d* u. s. f. braucht man, um von g, d, a, oder f aus die Durtonleiter zu bilden?

12. In der gleichschwebenden Temperatur sind 12 Quinten gleich 7 Oktaven. Warum? Wieviel beträgt die Abweichung bei reiner Stimmung?

13. Wie wird man bei gleichschwebender Temperatur einen Ton benennen, der α) 100, β) 1000, γ) 10 000, δ) 400, ε) 500 Schwingungen pro Sekunde macht? $a' = 440$. (Exponentialgleichung.)

14. Wie heifsen die zehn ersten Töne der Obertonreihe von c?

15. Auf einem Musikinstrumente werden zwei Klänge angegeben, die im Intervall α) der Oktave, β) der Quint, γ) der Quart u. s. f. stehen. Welche Töne hört man, welche Töne der beiderseitigen Obertonreihen fallen zusammen? Auszuführen in folgender Weise:

Klang d. Grundtons	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Schwingungen
Klang der Terz	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{15}{4}$		5	$\frac{25}{4}$	$\frac{30}{4}$	$\frac{35}{4}$		10	„

Der vierte Ton der Terzreihe fällt mit dem fünften der Grundtonreihe zusammen.

Je höher die Ordnungszahl der gemeinsamen Töne, je schwächer daher diese sind, um so unvollkommener ist die Konsonanz (Helmholtz). Die Empfindung der Konsonanz beruht also wahrscheinlich auf der Wahrnehmung gemeinsamer Bestandteile in den konsonierenden Klängen.

16. Man trage in den Gleichgewichtslagen der einzelnen Punkte einer Longitudinalwelle das zur Zeit t vorhandene Verdichtungsverhältnis derselben als Ordinate auf. Welche Gestalt hat der geometrische Ort der Endpunkte? Die Verdichtung ist am gröfsten, wo zur selben Zeit die Elongation 0 ist und umgekehrt. [45. Gl. III.]

47. Die Interferenz (inter und fero). — Wenn sich in einem Körper gleichzeitig zwei Wellenbewegungen fortpflanzen, so werden die einzelnen Punkte des Körpers durch jede derselben zu einer schwingenden Bewegung genötigt; die beiden schwingenden Bewegungen hat man zusammenzusetzen, um die wirkliche Bewegung eines Punktes zu finden. Diese Zusammensetzung bezeichnet man als Interferenz der Schwingungen eines Punktes und die Zusammensetzung der durch die beiden Wellen erzeugten Schwingungen eines jeden Punktes des Körpers als Interferenz der Wellen. Interferenz ist also nur eine in der Wellentheorie gebräuchliche besondere Bezeichnung für das allgemeine Verfahren der Zusammensetzung von Bewegungen.

Leicht zu beobachten ist die Interferenz der Wasserwellen an der Oberfläche. Die einzelnen Wellenzüge schreiten durcheinander fort, ohne sich zu stören; über gröſsere Wellen z. B. kräuseln kleinere hin: die Bewegung, die jeder Punkt infolge des einen Wellenzugs erhält, setzt sich einfach zusammen mit der, ihm durch den andern erteilten. So kann es sich treffen, daſs ein Punkt vermöge beider Wellenzüge eine stärkere Schwingung ausführt als er vermöge eines einzelnen gemacht hätte; es kann aber auch eintreten, daſs die resultierende Bewegung geringere Amplitude hat, als die Komponenten, ja daſs die Wasserfläche an einer Stelle horizontal bleibt, trotzdem Wellen über sie hinziehen. Das alles hängt davon ab, ob der betrachtete Punkt infolge der Einzelwellen in gleicher oder verschiedener Richtung mit gleicher oder verschiedener Geschwindigkeit aus seiner Gleichgewichtslage getrieben wird.

Die Interferenz der Schallwellen beobachtet man mittels des Gabelrohres von Hopkins oder mittels der Interferenzröhre von Quincke, durch welche der Schall auf zwei verschieden langen Wegen vom Tonerzeuger zum Ohre geführt wird. Durch beide Apparate läſst sich zeigen, daſs durch Zusammensetzen zweier Wellen ebensowohl eine Verstärkung als eine Schwächung des Tons, den jede einzeln erzeugen würde, entstehen kann.

Als eine Interferenzerscheinung ist jeder Klang anzusehen. Jedem einzelnen Tone des Klanges entspricht eine einfache Wellenfolge, dem Klange also eine Luftbewegung, welche die Resultante dieser einzelnen einfachen Wellen ist.

Übungen.

1. In einer Punktreihe pflanzen sich zwei einfache Wellenzüge in gleicher Richtung fort, die sich nur unterscheiden in den Amplituden r_1 und r_2. Wie heifst die Gleichung der resultierenden Welle? Man konstruiere dieselbe.

2. Ebenso, doch unterscheiden sich die Wellen noch in der Schwingungsrichtung, indem die Schwingungen transversal und und in zwei Ebenen stattfinden, die den Winkel α bilden.

3. Wie Üb. 1, doch unterscheiden sich die Wellen noch dadurch, dafs sie dem ersten Punkte O der Reihe Schwingungen vom Phasenunterschied φ, z. B. 1) 0, 2) π, 3) $\frac{1}{2}\pi$, 4) $\frac{1}{4}\pi$ erteilen. Zu beweisen, dafs die resultierende Welle die Gleichung $y = \varrho \sin [(2\pi : T) t - (x : c) + \delta]$ hat, wo ϱ und δ aus dem Parallelogramm folgen, das r_1 und r_2 zu Seiten, φ zum eingeschlossenen Winkel hat. Anleitung: Man setze $(2\pi : T) t - (x : c) = \tau$ und hat einerseits $y = \varrho \sin (\tau + \delta)$, andererseits $y = r_1 \sin \tau + r_2 \sin (\tau + \varphi)$. Man löse die Sinus der Winkelsummen auf und vergleiche die Glieder der beiderseits entstehenden Ausdrücke.

4. Zu Üb. 3. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ sind die Wellen graphisch zusammenzusetzen.

5. Mittels Üb. 3 und 4 die Interferenz im Gabelrohr von Hopkins zu erklären.

6. Von den Punkten O und Q der Punktreihe aus pflanzen sich in gleicher Richtung zwei Wellen fort, die sich nur in der Amplitude unterscheiden (O und Q gehen also auch gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage). Wie heifst die Gleichung der resultierenden Welle, wenn $OQ = l$ den Wert hat 1) 0, 2) $\frac{1}{2}\lambda$, 3) $\frac{1}{4}\lambda$, 4) λ, 5) ein ganzes Vielfaches von λ? Verfahre wie in Üb. 3. Welche Distanz l der Erregungspunkte hat denselben Einflufs, wie ein gegebener Phasenunterschied φ?

7. Zu Üb. 6. Für $l = \frac{1}{4}\lambda$ die Zusammensetzung graphisch auszuführen.

8. In der Punktreihe pflanzen sich zwei Transversalwellen von gleicher Richtung und Geschwindigkeit fort, deren Schwingungen in zwei Ebenen erfolgen, welche normal zu einander liegen. Der Phasenunterschied beider Wellen ist $\frac{1}{2}\pi$. Man gebe an: die Art der resultierenden Schwingungen, den geometrischen Ort für alle schwingenden Punkte (krumme Fläche), die Gestalt der Welle und zwar 1) für den Fall gleicher, 2) verschiedener Amplituden der interferierenden Wellen. (Cirkulare und elliptische Schwingungen.)

9. Wie Üb. 8, doch seien die Amplituden gleich und der Phasenunterschied φ betrage 1) 0, 2) $\frac{1}{4}\pi$, 3) $\frac{1}{2}\pi$, 4) $\frac{3}{4}\pi$.

(Cirkulare und elliptische Schwingungen.) Die Rechnung läfst sich mittels der Fesselschen Wellenmaschine bestätigen.

10. Man zeichne die Welle, die resultiert, wenn die Wellen interferieren, welche folgende Intervalle erzeugen: 1) Grundton und Oktave, 2) Grundton und Quint der Oktave, 3) die vier ersten Töne der Obertonreihe, 4) Grundton und Quint. Dabei wähle man einmal den Phasenunterschied 0, dann auch π, ferner $\frac{1}{2}\pi$. Die Amplituden der Teilwellen kann man beliebig wählen, z. B. so, dafs die Schwingungen der komponierenden Wellen gleiche Energie enthalten. Die Zeichnung führe man für Transversalwellen von gleicher Schwingungsebene aus und denke sich die Elongation im 10fachen oder 100fachen Mafsstabe der Punktabstände aufgetragen.

11. Von zwei Punkten, z. B. den beiden Enden der Stimmgabelzinken pflanzen sich Verdichtungen und Verdünnungen fort. Welches sind in einer durch die beiden Punkte gelegten Ebene die geometrischen Orte gröfster und geringster Dichtigkeitsänderung oder in welchen Punkten verstärken, in welchen schwächen sich die beiden Wellen? Hyperbeln. Versuch mit einer tönenden Stimmgabel, die man um ihre Längsachse dreht.

48. Die Schwebungen. — Ein besonderer Fall der Interferenz ist der folgende. Ein Punkt sei zwei harmonischen Bewegungen unterworfen, deren Schwingungszahlen 100 und 104 sind. Bei Beginn einer gewissen Sekunde mögen beide Ursachen den Punkt in gleicher Richtung aus der Gleichgewichtslage treiben, sich also verstärken. Dasselbe ist dann nach Ablauf von 25 Schwingungen der ersten oder 26 Schwingungen der zweiten Bewegung, also nach $^1/_4$ Sekunde der Fall. Nach $12\frac{1}{2}$ Schwingungen der ersten, 13 Schwingungen der zweiten Bewegung aber, d. i. nach $^1/_8$ Sekunde, treiben die beiden Bewegungsursachen den Punkt in entgegengesetzter Richtung an, schwächen sich also. Während der Sekunde wird viermal ein Anschwellen des Klangs, ein Stofs, dazwischen viermal eine Schwächung des Klangs, eine Pause, wahrzunehmen sein. Ein solches sich periodisch wiederholendes Stärker- und Schwächerwerden des Klanges nennt man eine Schwebung.

Sind allgemein N und N' die Schwingungszahlen beider Töne, s die Zahl der Schwebungen pro Sekunde, so ist $N - N' = s$. Denn auf die Zeit $1:s$ einer Schwebung kommen $N:s$ Schwingungen des einen, $N':s$ Schwingungen des andern Tons; da aber in dieser

Zeit die eine Wellenbewegung eine Schwingung mehr ausgeführt haben mufs, als die andere, so folgt

$$\frac{N}{s} - \frac{N'}{s} = 1, \quad N - N' = s.$$

Die Zahl der Schwebungen in der Sekunde ist gleich der Differenz der Schwingungszahlen der beiden interferierenden Töne.

Diese Schwebungen nimmt man einzeln wahr, wenn ihre Anzahl pro Sekunde nicht sehr grofs ist, also die interferierenden Töne sich wenig in der Höhe unterscheiden. Bei etwas gröfserer Anzahl können sie zwar nicht mehr einzeln aufgefafst werden, erzeugen aber die Empfindung der Rauhigkeit des Klanges, welche von Helmholtz als eine wesentliche Ursache der Dissonanz erkannt wurde. (Nach älterer, durch Helmholtz stark erschütterter Ansicht, bewirken sehr rasche Schwebungen eine Tonempfindung, die Kombinationstöne.)

Die Schwebungen benutzt man zur genauen Abstimmung eines Tons. Der Ton a' mufs z. B. vier Schwebungen mit einer Hülfsgabel von der Schwingungszahl 436 geben.

Übungen.

1. Wieviel Schwebungen giebt mit dem Grundton von der Schwingungszahl 300 der kleine und grofse Halbton, der kleine und grofse Ganzton? β) Dasselbe für den Ton mit 3000 Schwingungen als Grundton.

2. Methode von Sauveur und Scheibler zur Bestimmung der Schwingungszahl. Zur Stimmgabel vom Tone *a* hat man eine andere fertigen lassen, deren Ton nach gleichschwebend temperierter Skala als *ais* erkannt wird. Beide Gabeln geben 783,2 Schwebungen in der Minute. Wie grofs ist die Schwingungszahl von a_1? Die Schwebungen zählte man mit Benutzung zweier Hülfsgabeln, deren Töne zwischen *a* und *ais* liegen und nahezu vier Schwebungen in der Sekunde geben; *a* gab mit der ersten Hülfsgabel 272,4, diese mit der zweiten 270,8, die zweite mit der *ais*-Gabel 240 Stöfse. (Wüllner.)

3. Tonometer von Scheibler. Durch Herstellung einer Reihe von Stimmgabeln deren jede mit der folgenden etwa vier Stöfse gab und deren erste und letzte den Tönen *a* bez. a_1 nahe lagen, fand Scheibler, dafs die Schwingungszahlen dieser eine Oktave bildenden Töne sich um 219,6667 unterschieden. Wie grofs ist die Schwingungszahl des Kammertons?

4. Zu einem Klange dessen Grundton 300 Schwingungen macht, erklingt der Klang der Prime, 2) Oktave, 3) Quint, 4) Quarte, 5) grofsen Terz u. s. f. Wenn nun der erstere Klang verstimmt wird, so dafs sein Grundton 301 Schwingungen macht, während der andere Klang rein bleibt, welche Töne der Obertonreihe beider Klänge geben dann die langsamsten Schwebungen? Man findet, dafs die Konsonanzen verschieden leicht die Verstimmung hörbar machen: je unvollkommener sie sind, um so schwächer sind die Obertöne, die zu Schwebungen Veranlassung geben (Helmholtz).

5. Um die Interferenz der beiden Schwingungen eines Punktes

$$y = r \sin 2\pi N t \qquad y' = r \sin 2\pi N' t$$

graphisch darzustellen, trage man zu den Abscissen t die Ordinaten y, y', $y + y'$ auf. $N = 20$, $N' = 22$ mufs zwei Stöfse pro Sekunde ergeben.

6. Dasselbe algebraisch, indem man $y + y'$ als Produkt darstellt und erkennt, dafs sich die resultierende Bewegung als eine Schwingung mit der veränderlichen Amplitude $2r \cos \pi (N' - N) t$ auffassen läfst, falls N und N' wenig verschieden sind

7. Wie heifsen in gleichschwebender Temperatur die Töne, die mit a_0 4, β) 8, γ) 12, δ) 20 Schwebungen geben? Allgemein: die Töne, die mit einem Tone, dessen Schwingungszahl N ist, s Stöfse geben?

8. Wieviel Schwebungen geben die Obertöne der temperierten Quinte, welche die Klänge $c_1 g_1$ bilden?

49. Die stehenden Wellen. — Wenn in einem Seile nicht nur eine oder wenige Wellen hervorgebracht werden, sondern durch wiederholte Rucke am Seilende eine länger dauernde Folge derselben, so tritt eine Interferenzerscheinung dadurch ein, dafs die neu erzeugten Wellen mit den früher erzeugten und dann am Seilende reflektierten Wellen sich zusammensetzen. Es interferieren dann zwei Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen.

Wir untersuchen diesen Fall der Interferenz, indem wir uns denken, dafs sich von den Punkten A und B aus zwei einfache Wellenzüge von gleicher Amplitude und Schwingungsdauer fortpflanzen und dafs die Erregungspunkte AB gleichzeitig die Gleichgewichtslage in gleicher Richtung verlassen. Der von A nach B sich fortpflanzende Wellenzug erteilt zur Zeit t einem Punkte P im Abstande x von A die Elongation

$$y_1 = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

während gleichzeitig der von B nach A schreitende Wellenzug dem Punkte P die Elongation gibt

$$y_2 = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{a-x}{c}\right),$$

wenn $a = AB$. Daher erhält P wirklich die Elongation

$$y = y_1 + y_2 = 2r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{a}{2c}\right) \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2x-a}{2c}.$$

Wählen wir der Einfachheit halber a gleich einer geraden Anzahl Wellenlängen $a = 2ncT = 2n\lambda$, so wird

I. $$y = 2r \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \,.\, \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

die Gleichung der stehenden Welle.

Hiernach macht jeder Punkt der Strecke AB eine harmonische

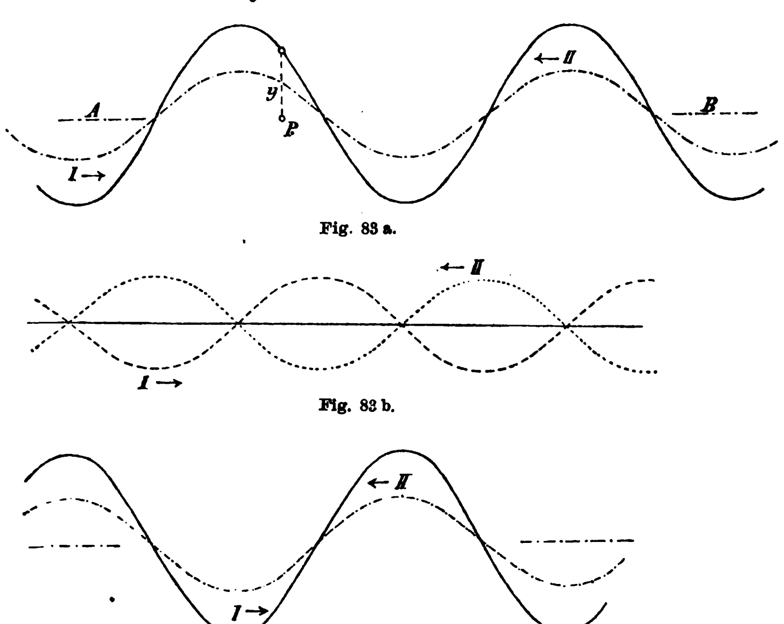


Fig. 83 a.

Fig. 83 b.

Fig. 83 c.

Bewegung. Die Amplituden dieser Bewegungen sind von Punkt zu Punkt andere. Die Amplitude ist nämlich gleich $2r\cos(2\pi : \lambda)\, x$;

die Punkte, deren Amplitude die gröfstmögliche, $2r$, ist, heifsen Bäuche; die Punkte, deren Amplitude Null ist, also die Punkte, die in Ruhe bleiben, heifsen Knoten. Die Bäuche, wie die Knoten, folgen sich in Abständen $\frac{1}{2}\lambda$. Die Knotendistanz ist gleich der halben Wellenlänge der interferierenden Wellen. Alle Punkte der Strecke AB gehen gleichzeitig durch ihre Gleichgewichtslage, während bei einem einfachen Wellenzug jeder folgende Punkt die Gleichgewichtslage etwas später verläfst, als der vorangehende. Daher nennt man die betrachtete Interferenzerscheinung eine stehende Welle und im Gegensatz dazu die gewöhnliche Wellenbewegung eine fortschreitende. Die stehende Welle ist also die Resultante zweier in entgegengesetzter Richtung fortschreitenden Wellenzüge.

Die Figg. 83 stellen eine transversale stehende Welle dar im Augenblicke des Durchgangs aller Punkte durch die Gleichgewichtslage, sowie in den Augenblicken der beiden Amplitudenlagen.

Die Figg. 84 stellen eine longitudinale stehende Welle für dieselben drei Augenblicke dar. (Konstruktion wie bei Fig. 82.)

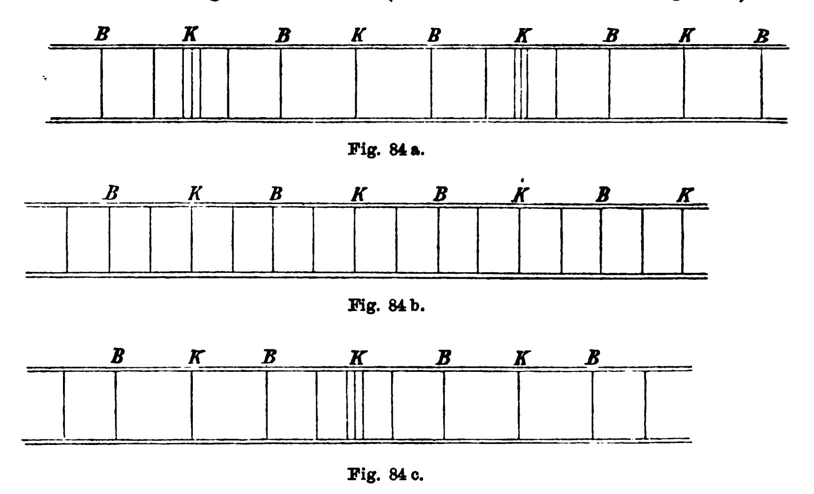


Fig. 84 a.

Fig. 84 b.

Fig. 84 c.

Man erhält diese Figuren durch Zusammensetzung zweier von A und von B aus fortschreitenden Wellenzüge, die in den Figg. 83 durch — — — — und . . . . . . angegeben sind.

In longitudinalen stehenden Wellen finden Dichtigkeitsänderungen statt, wie die Figg. 84 erkennen lassen. Man sieht zugleich,

dafs die stärksten Dichtigkeitsänderungen sich an den Knoten zeigen. Dasselbe ergibt die Rechnung folgendermafsen [vergl. 45. Gl. III.]: Zwischen A und B mögen sich die schwingenden Punkte in gleichen Abständen $d = a : n$ befinden, so lange Gleichgewicht herrscht. Während der stehenden Longitudinalwelle ist dann der Abstand zweier aufeinander folgenden schwingenden Molekeln

$$d' = \frac{a}{n} + y' - y = \frac{a}{n} + 2r\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x + \frac{1}{2}\frac{a}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$- 2r\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{1}{2}\frac{a}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{T}t$$

$$= \frac{a}{n} - 4r\sin\frac{2\pi}{T}t\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\frac{\pi}{\lambda}\frac{a}{n},$$

wenn x den Abstand von A aus gemessen bezeichnet, welchen der im Gleichgewichtszustande mitten zwischen den beiden betrachteten Molekeln liegende Ort besitzt. Wenn nun n so grofs ist, dafs $a : n$ gegen λ sehr klein erscheint, so folgen sich die Punkte während der Wellenbewegung in Abständen

$$d' = \frac{a}{n}\left\{1 - 4r\frac{\pi}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\frac{2\pi}{T}t\right\}.$$

Ist ferner m die Masse eines schwingenden Punktes, so ist $\mu = m : d$ durchschnittlich die Masse auf der Längeneinheit im Gleichgewichtszustande; während der Wellenbewegung aber ist die Masse der Längeneinheit $\mu' = m : d'$

$$\mu' = \mu : \left\{1 - 4r\frac{\pi}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\frac{2\pi}{T}t\right\}.$$

Ist λ grofs gegen r, so kann man, höhere Potenzen von $r : \lambda$ vernachlässigend, setzen

$$\mu' = \mu . \left\{1 + 4\pi\frac{r}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\frac{2\pi}{T}t\right\}.$$

Endlich folgt das Verdichtungsverhältnis

$$\text{II.} \qquad \frac{\mu' - \mu}{\mu} = 4\pi\frac{r}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\frac{2\pi}{T}t.$$

An den Bäuchen, d. i. den Punkten, wo $\cos(2\pi : \lambda)x$ gleich ± 1, ist das Verdichtungsverhältnis 0; dort herrscht also auch während der Wellenbewegung die natürliche Dichte μ. An den Knoten aber, wo dauernd $y = 0$, $\cos(2\pi : \lambda)x = 0$ ist, wird

$\sin (2\pi : \lambda) x = \pm 1$; dort schwankt das Verdichtungsverhältnis zwischen $\pm 4\pi r : \lambda$. Die aufeinander folgenden Knoten zeigen zur selben Zeit abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen und an jedem Knoten wechselt während der Periode der Dichtigkeitszustand.

Die mittlere Energie der Schwingung eines jeden Punktes der stehenden Welle bleibt immer dieselbe, daher auch die mittlere Energie der ganzen Punktreihe AB. (Bei der fortschreitenden Welle sinkt die Energie jedes Punktes auf 0 herab, indem sie an den folgenden Punkt übertragen wird.) Ein Körper also, von welchem auch nur kurze Zeit andauernd ein Ton ausgeht, ein tönender Körper oder eine Tonquelle, mufs aus Punktreihen bestehen, die sich im Zustande stehender Wellenbewegung befinden. Er hört, wenn ihm nicht immer neue Energie zugeführt wird, allmählich auf zu tönen, indem er die vorhandene, bei der Tonerregung in ihm angesammelte Energie dem umgebenden Körper (der Luft) mitteilt, der sie durch fortschreitende Wellen fortpflanzt.

Die Punktreihen, welche sich in stehenden Schwingungen befinden, lassen sich bei den meisten in der Musik angewendeten Tonquellen leicht angeben, weil bei diesen eine Dimension vorherrscht. Diese Tonquellen von einer wesentlichen Dimension zerfallen in

Feste tönende Körper
- die durch Spannung schwingen: Saiten,
- die durch eigne Elasticität schwingen: Stäbe.

Luftförmige tönende Körper, die erregt werden
- durch einen vorüberstreichenden Luftstrom: Lippenpfeifen,
- durch einen festen schwingenden Körper: Zungenpfeifen.

Verwickelter ist die Angabe der in stehenden Wellen befindlichen Punktreihen bei denjenigen Tonquellen, bei denen zwei Dimensionen vorherrschen oder gar in den Fällen, wo keine Dimension unbeachtet gegen die anderen bleiben kann. Membranen, Platten (Glocken), tönende Luftmassen (kubische Pfeife).

Dafs sich tönende Körper in stehenden Wellenbewegungen befinden beweist man, indem man das Vorhandensein von Knoten zeigt. Papierreiter für Saiten, Kundtsche Figuren für Stäbe, Hopkins Tamburin für Pfeifen, Chladnische (und Faradaysche) Figuren für Platten.

Eine Saite ist nur solcher stehenden Wellen fähig, bei denen die Saitenenden Knoten sind, da ja die Saitenenden in Ruhe bleiben müssen. Daher ist die Saitenlänge L gleich der Knotendistanz oder einem ganzen Vielfachen derselben. Da nun die Knotendistanz gleich der halben Wellenlänge derjenigen Wellen ist, die durch ihre Interferenz die stehende Welle erzeugen, so können in einer Saite nur Wellen bestehen, deren Längen λ der Gleichung genügen

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda = \frac{2L}{n},$$

wo n eine ganze Zahl. Diese Wellen pflanzen sich von der Erregungsstelle beiderseits fort, werden an den Enden reflektiert und interferieren dann zur stehenden Welle. Wegen $\lambda = cT$ oder $\lambda = c : N$ folgt, dafs die Schwingungszahl N der Töne, die eine Saite erzeugen kann, gleich ist

$$N = n \frac{c}{2L}.$$

(Über die Geschwindigkeit c, mit der die Transversalwellen sich in der Saite fortpflanzen vergl. [50]). Eine Saite ist daher nicht nur eines Tones fähig, sondern einer Reihe von Tönen, der Obertonreihe zum Grundtone oder tiefsten Tone der Saite, dessen Schwingungszahl $c : 2L$ ist. Ihre stehende Wellenbewegung kann daher nur die Resultante sein, aus einfachen stehenden Wellen, welche der Obertonreihe ihres Grundtones entsprechen. Jede stehende Wellenbewegung, deren sie fähig ist, mufs sich zerlegen lassen in gewisse einfache stehende Wellen oder jeder Klang, den sie gibt, in Töne jener Obertonreihe.

Eine offene Lippenpfeife ist nur solcher stehenden Wellen fähig, die an der Lippe wie am Ende einen Bauch hervorbringen, weil ja an diesen Stellen, oder wenigstens nahe bei denselben, dauernd die Dichtigkeit der äufseren Luft herrschen mufs. Da nun die Entfernung zweier aufeinanderfolgenden Bäuche gleich der halben Wellenlänge der Wellen ist, durch deren Interferenz die stehende Welle zustande kommt, so ergeben sich für die Wellenlängen und Schwingungszahlen der Pfeifentöne dieselben Gleichungen, wie für die der Saitentöne, wenn L die Pfeifenlänge, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Luftwellen bedeutet.

Anders bei der gedeckten Pfeife; an deren gedecktem Ende mufs ein Knoten entstehen, da dort die freie Beweglichkeit der Luftteile durch die deckende Wand aufgehoben ist. Hier mufs die Pfeifenlänge gleich dem Abstande eines Bauches von einem Knoten sein, also gleich $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, . . . $\frac{1}{2}(2n+1)$ mal der Knotendistanz oder halben Wellenlänge. Daher folgt

$$\lambda = \frac{4L}{2n+1}, \quad N = (2n+1)\frac{c}{4L}.$$

Die geradzahligen Obertöne des Grundtons fehlen also der gedeckten Pfeife und ihr Grundton ist eine Oktave tiefer als der der gleichlangen offenen Pfeife.

Stäbe verhalten sich wie Saiten und offene Pfeifen, wenn beide Enden eingeklemmt, also Knoten, oder beide frei, also Bäuche sind; sie verhalten sich wie gedeckte Pfeifen, wenn ein Ende eingeklemmt, eins frei ist. Stäbe können sowohl Transversal-, als Longitudinal- und Torsionsschwingungen machen, je nachdem sie auf Biegung, Zug oder Torsion beansprucht wurden. In diesen drei Fällen geben sie verschiedene Grundtöne, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c für Transversal-, Longitudinal- und Torsionswellen verschieden ist.

Übungen.

1. Von A nach B und von B nach A pflanzen sich zwei Wellen fort, die in Amplitude und Periode übereinstimmen und so beschaffen sind, dafs die Erregungspunkte A und B ihre Gleichgewichtslage gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung verlassen. Welches ist die Gleichung der stehenden Welle, die sich bildet, wo liegen Knoten und Bäuche?

2. Der Grundton einer Saite ist c. Welche Töne können in ihrem Klange enthalten sein? Welche davon müssen dem Klange fehlen, wenn die Saite in $\frac{1}{7}$ ihrer Länge angeschlagen wird? Welche fehlen, wenn sie in der Mitte angeschlagen wird?

3. Der Grundton einer gedeckten Pfeife ist C. Welche Töne können in ihrem Klange vorkommen? Welcher Töne ist die gleichlange offene Pfeife fähig? Wie lang mufs die gedeckte, wie lang die offene Pfeife sein, um C als Grundton zu geben? Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Luftwellen 340 m : sec.

4. Welchen Ton giebt eine α) 4 m, β) 4 cm lange Pfeife, wenn sie offen ist? Welche Änderung erleidet der Ton, wenn die Pfeife gedeckt wird?

5. Ein in der Mitte gehaltener Silberstab von 1 preuſs. Fuſs Länge, giebt longitudinal schwingend d_5 als Grundton; ein 4 Fuſs langer Stab von Weidenholz ebenso c_4. Wie groſs ist die Schallgeschwindigkeit in Silber und in Holz? (Fliedner.)

6. Wie lang muſs eine offene und eine gedeckte Pfeife sein, die a_1 geben soll; wie lang um den Ton von 16 Schwingungen pro Sekunde zu geben?

7. Eine Saite die den Ton a_1 einer Stimmgabel gab, muſste um das 0,0091 fache ihrer Länge verlängert werden, um mit der Gabel vier Schwebungen zu liefern. Wie groſs ist die Schwingungszahl der Gabel hiernach? (Scheibler.)

8. Eine Saite, die in $\frac{1}{7}$ der Länge aus der Gleichgewichtslage gezogen wird, so daſs ihre Gestalt durch zwei gerade Linien dargestellt wird, und die man dann losläſst, giebt auſser dem Grundtone noch die Obertöne, in der Weise, daſs, wenn die Amplitude des Grundtons gleich 1 gesetzt wird, die des $m$ten Tons ist

$$\frac{1}{m^2}\left(\sin\frac{m}{7}\pi : \sin\tfrac{1}{7}\pi\right).$$

Dieses Ergebnis der höheren Mathematik prüfe man, indem man die den einzelnen Tönen entsprechenden stehenden Wellen konstruiere und die durch Interferenz derselben entstandene Welle zeichne, welche aus zwei Geraden bestehen muſs. (Als Einheit für die Amplituden wähle man etwa 5 cm). Man berechne ferner die Intensität der einzelnen Töne, indem man die des Grundtons gleich 100 setzt. (Die Intensitäten ergeben sich gleich 100, 81, 56, 32, 13, 3, 0.)

9. Vor einer reflektierenden Wand wird ein Ton erzeugt von der Wellenlänge λ. Die Welle interferiert mit der reflektierten. Wo liegen die Knoten? (Seebeck's Versuch.)

50. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. — Wir haben in [45] die Wellenbewegung der Erfahrung entnommen, ohne die Kräfte ins Auge zu fassen, die zwischen den einzelnen schwingenden Punkten wirken müssen, um eine Übertragung der Energie von einem zum andern möglich zu machen. Wir denken uns jetzt, um diese Untersuchung nachzuholen, eine Reihe gleichweit entfernter Punkte $ABCD\ldots$, zwischen denen anziehende Kräfte P wirken, die, wie es bei den elastischen Kräften der Fall ist, der Entfernung der Punkte proportional sind. Z. B. stellen wir uns die Punkte durch eine Reihe von Kugeln vor, die auf einem gespannten Seile sitzen oder die durch elastische Federn auseinandergehalten oder zusammengezogen werden, wie man dies

bei Wellenmaschinen [45] ausführt. Im ersten Falle sind die Kugeln transversaler, im zweiten longitudinaler Schwingungen fähig.

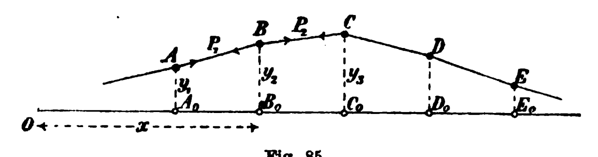


Fig. 85.

1. Transversalwellen. — Die auf einem gespannten Seile sitzenden Kugeln sind aus ihren Gleichgewichtslagen $A_0 B_0 C_0 \ldots$ ein wenig heraus gezogen worden und befinden sich nach dem Loslassen zu einer bestimmten Zeit in den Lagen $ABC \ldots$, so dafs $A_0 A = y_1$, $B_0 B = y_2$, $C_0 C = y_3 \ldots$ Die Bewegung jedes Punktes soll senkrecht zu $A_0 \ldots E_0$ erfolgen und sich nur sehr wenig von dieser Geraden entfernen. Die Bewegung senkrecht zu $A_0 E_0$ ist nur möglich, wenn die auf einen Punkt, z. B. auf B wirkenden Spannungen P_1 und P_2 entgegengesetzt gleiche Komponenten parallel $A_0 E_0$ ergeben. Diese Komponenten haben aber, falls $A_0 B_0 = B_0 C_0 = \ldots = a$ gesetzt wird, die Gröfsen

$$\frac{P_1 a}{\sqrt{a^2 + (y_2 - y_1)^2}} \text{ und } \frac{P_2 a}{\sqrt{a^2 + (y_3 - y_2)^2}}.$$

Wenn man nun die Quadrate der gegenseitigen Verschiebungen gegen das Quadrat des ursprünglichen Abstandes der Punkte vernachlässigen darf, also $\sqrt{a^2 + (y_2 - y_1)^2} = a$ und $\sqrt{a^2 + (y_3 - y_2)^2} = a$ setzen kann, so mufs $P_1 = P_2$ sein. Eine genaue Transversalbewegung aller Punkte ist demnach nur möglich, wenn die Spannung in allen Seilstücken die gleiche ist. Setzt man diese gemeinsame Spannung gleich P, so folgt die Summe der auf den Punkt B in der Richtung $B_0 B$ wirkenden Komponenten gleich

$$1.\quad K = -\frac{P(y_2 - y_1)}{\sqrt{a^2 + (y_2 - y_1)^2}} + \frac{P(y_3 - y_2)}{\sqrt{a^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

$$= -\frac{P(y_2 - y_1)}{a} + \frac{P(y_3 - y_2)}{a} = -\frac{2P}{a} y_2 + \frac{2P}{a} \cdot \frac{y_1 + y_3}{2}$$

Die in der Richtung nach A_0 wirkende Beschleunigung ist, wenn m die Masse des Punktes B, gleich

$$2.\quad \varkappa = -\frac{2P}{am} \cdot y_2 + \frac{2P}{am} \cdot \frac{y_1 + y_3}{2} = -\frac{2P}{am}\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right).$$

Die Bewegungsarten, die hiernach B ausführen kann, sind sehr mannichfache, verschieden je nach der Art, wie die Gleichgewichtslage gestört worden ist. In der That kann ein mit Kugeln besetztes gespanntes Seil sehr mannichfaltige Bewegungen ausführen. Unter diesen Bewegungen befindet sich aber die uns hier interessierende einfache Wellenbewegung. Denn setzt man

$$y = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right), \text{ d. h.}$$

$$y_1 = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_1}{c}\right) \qquad y_2 = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_2}{c}\right)$$

$$y_3 = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_3}{c}\right) \quad \text{u. s. f.}$$

wobei x den Abstand des betrachteten Punktes von einem beliebigen Anfangspunkte O bezeichnet, so folgt

$$\frac{y_1 + y_3}{2} = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{1}{c}\,\frac{x_1 + x_3}{2}\right) \cos \frac{2\pi}{T}\,\frac{1}{c}\,\frac{x_3 - x_1}{2}$$

$$\frac{y_1 + y_3}{2} = y_2 \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{a}{c}$$

$$3. \quad \varkappa = -\frac{2P}{am}\left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{a}{c}\right) \cdot y_2 = -\frac{4P}{am}\, y_2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{T}\,\frac{a}{c}.$$

Es ist demzufolge die Beschleunigung des Punktes B und ebenso die jedes andern der schwingenden Punkte proportional dem Abstande von der Gleichgewichtslage. Alle Punkte führen also harmonische Bewegungen aus; sie erfüllen die Bedingung, dafs sie sich stets in einer Senkrechten zur Linie $A_0 E_0$ bewegen; auch entfernen sie sich nur wenig von dieser Linie, wenn sie anfangs nur wenig aus ihr heraus gezogen wurden.

Jedoch mufs noch einer Forderung genügt werden, wenn alle Punkte harmonische Bewegungen ausführen sollen. Bei jeder harmonischen Bewegung ist die Beschleunigung das $(4\pi^2 : T^2)$-fache der Elongation [34 und 44]; daher mufs sein

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4P}{am} \sin^2 \frac{\pi a}{Tc} = \frac{4P}{am} \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda}$$

$$4. \qquad c^2 = \frac{Pa}{m}\left(\sin \frac{\pi a}{\lambda} : \frac{\pi a}{\lambda}\right)^2$$

Wir wenden diese Erörterungen an auf die Untersuchung der Transversalbewegung eines Seiles oder einer Saite. Wir nähern uns diesem Falle um so mehr, je kleiner wir a wählen. Denn wir haben uns jetzt unter den schwingenden Punkten die Molekeln je eines Querschnitts des Seils oder der Saite zu denken. Da dann a sehr klein ist gegen λ, so kann man $\sin(\pi a : \lambda)$ durch $(\pi a : \lambda)$ ersetzen und findet, dafs die einfache Wellenbewegung

$$y = r \sin 2\pi \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

allerdings eine Bewegungsform darstellt, deren das Seil fähig ist, wenn nur die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$5. \qquad c = \sqrt{\frac{Pa}{m}} = \sqrt{\frac{P}{\mu}}.$$

Hierbei bezeichnet $\mu = m : a$ die Masse pro Längeneinheit des Seils. Längs des Seils oder der Saite können sich nur einfache Wellen mit der hier berechneten Geschwindigkeit fortpflanzen.

Es ist oben erwähnt worden, dafs ein Seil sehr mannichfaltiger Bewegungen fähig ist. Sehr viele derselben, nämlich alle schwingenden Bewegungen von kleiner Amplitude, gelingt es als Interferenzerscheinungen einfacher Wellenzüge darzustellen. Wenn z. B. eine Saite an beiden Enden befestigt ist, so ist sie zwar einer einfachen Wellenbewegung nicht fähig, wohl aber einer stehenden Welle, entstanden durch Interferenz zweier einfachen Wellen. Alle stehenden Wellen können sich in ihr bilden, die zwei Knoten an den Saitenenden bilden, alle Töne kann sie demnach geben, deren Schwingungszahl ist

$$6. \qquad N = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{P}{\mu}} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{P \cdot g}{s \cdot q}}.$$

Hier bedeutet s das specifische Gewicht des Materials der Saite, q den Querschnitt derselben, g die Beschleunigung der Schwere.

Die Erfahrung bestätigt diese Formel [Üb. 1] und damit die Zulässigkeit der bei ihrer Ableitung gemachten Annahme über das Verhältnis der Elongationsunterschiede zum Abstand der schwingenden Punkte und über das Verhältnis des letztern zur Wellenlänge.

2. Longitudinalwellen. — Wir denken uns Kugeln

$A_0 B_0 C_0 \ldots$ in gleichen Abständen a geradlinig angeordnet und durch elastische Federn auseinandergehalten oder zusammengezogen. Verschiebt man nun die Kugeln in Richtung der Reihe $A_0 \ldots E_0$ um bez. $y_1, y_2, y_3 \ldots$, so entstehen wegen der Ausdehnung oder Zusammendrückung der Federn elastische Kräfte. Auf einen Punkt B der Reihe z. B. wirkt in der Richtung $A_0 E_0$ die Kraft

$$\frac{Q}{a}(y_3 - y_2) - \frac{Q}{a}(y_2 - y_1)$$

wenn mit Q die elastische Kraft bezeichnet wird, die eine der Federn ausübt, sobald sie um die eigne Länge ausgedehnt oder zusammengedrückt wird, vorausgesetzt, dafs dies innerhalb der Elasticitätsgrenze [40] möglich wäre. Demnach erlangt B die Beschleunigung

2a. $$\varkappa = -\frac{2Q}{am}\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right).$$

Das ist dieselbe Formel, wie die oben für transversale Schwingungen hergeleitete, nur tritt Q an Stelle von P. Daher ergiebt sich unter den für Transversalwellen gemachten Annahmen auch weiter für Longitudinalwellen in einer Reihe von Punkten, die so dicht liegen, dafs a klein ist gegenüber λ

5a. $$c = \sqrt{\frac{Q}{\mu}}$$

wobei $\mu = m : a$ die Masse pro Längeneinheit der Punktreihe. Die Formel ist auch gültig für einen Stab vom konstanten Querschnitte q, indem je ein Querschnitt als ein schwingender Punkt der vorher betrachteten Reihe angesehen wird. Da alsdann $Q : q = E$ der Elasticitätskoeffficient, $\mu : q = \delta$ die Dichte des Stabes, so folgt auch

6a. $$c = \sqrt{\frac{E}{\delta}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen ist gleich Wurzel aus Elasticitätskoefficient dividiert durch Dichte.

Über die Bestätigung dieser Formel durch Versuche siehe Üb. 4.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Longitudinalwellen in Luft (oder in Gasen) berechnet man auf folgendem Wege. Man denke sich durch eine cylindrische lufter-

füllte Röhre in gleichen Abständen a Querschnitte $A_0 B_0 C_0 \ldots$, deren Gröfse q sei, gelegt. Verschieben sich diese um bez. y_1, y_2, $y_3 \ldots$ in der Längsrichtung der Röhre, so ändert sich der Luftdruck zwischen den einzelnen Querschnitten dem Mariotte-Gay Lussac'schen Gesetze gemäfs. Ist also p der Luftdruck, τ die absolute Temperatur im Gleichgewichtszustande, und erreicht z. B. zwischen A und B bei der Gleichgewichtsstörung der Druck den Wert p', die absolute Temperatur den Wert τ', so ist

$$\frac{p \cdot qa}{\tau} = \frac{p' \cdot q(a + y_2 - y_1)}{\tau'}, \quad p' = p \cdot \frac{\tau'}{\tau} \cdot \frac{a}{a + y_2 - y_1}.$$

Sind die Elongationsunterschiede $y_2 - y_1$ immer gering gegen den ursprünglichen Abstand a der Luftschichten, so kann man den Quotienten

$$\frac{a}{a + y_2 - y_1} = \frac{1}{1 + \frac{y_2 - y_1}{a}} \text{ vertauschen mit } 1 - \frac{y_2 - y_1}{a}$$

und erhält als Luftdruck nach der Störung

$$p' = p \cdot \frac{\tau'}{\tau} \cdot \left(1 - \frac{y_2 - y_1}{a}\right).$$

Vernachlässigt man die bei den Zusammenpressungen und Ausdehnungen eintretenden Temperaturschwankungen, so ist

$$p' = p\left(1 - \frac{y_2 - y_1}{a}\right)$$

und die auf den Querschnitt B wirkende, längs $A_0 E_0$ gerichtete Kraft wird

$$pq\left(1 - \frac{y_2 - y_1}{a}\right) - pq\left(1 - \frac{y_3 - y_2}{a}\right) = -2\frac{pq}{a}\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right).$$

Sie erteilt den auf einem Querschnitt liegenden Molekeln, deren Gesamtmasse m sei, die Beschleunigung

$$\text{2b.} \qquad \varkappa = -\frac{2pq}{am}\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2}\right).$$

Diese Formel läfst sich nun auf die Fortpflanzung in der Luft anwenden, wenn man sich die Luftmolekeln der Röhre auf gleichweit entfernte Querschnitte gleich verteilt denken kann. Als Abstand a dieser Querschnitte mufs man den mittleren Abstand

der Molekeln wählen. Ist dann δ die Dichte des Gases, so ist $m = qa\delta$. Demzufolge wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen

$$c = \sqrt{\frac{p}{\delta}}. \tag{6 b.}$$

Bei der absoluten Temperatur τ ist dem Mariotte-GayLussac'schen Gesetze zufolge

$$\frac{p}{\delta\tau} = \frac{760 \,.\, 773}{273},$$

wenn p in Millimetern Quecksilbersäule gemessen wird. Somit folgt endlich

$$c = \sqrt{\frac{9{,}808 \,.\, 0{,}76 \,.\, 13{,}59 \,.\, 773}{273}}\sqrt{\tau} \tag{7.}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft ist proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur der Luft. Bei 0^0 C ist sie der Formel gemäfs $\sqrt{9{,}808 \,.\, 0{,}76 \,.\, 13{,}59 \,.\, 773}$, während die Beobachtung 332 m : sec ergiebt. Die Abweichung rührt her von der Vernachlässigung der durch die Volumänderungen hervorgebrachten Temperaturschwankungen. Berücksichtigt man, dafs sich letztere nicht rasch genug auszugleichen vermögen, um vernachlässigt werden zu dürfen und stellt sie in Rechnung, was hier mit elementaren Mitteln nicht ausgeführt werden kann, so folgt für die Beschleunigung ein Wert

$$\varkappa' = \frac{c_p}{c_v}\varkappa = 1{,}4 \,.\, \varkappa, \tag{8.}$$

wobei c_p und c_v die specifischen Wärmen der Luft bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen bezeichnen. Dann wird ferner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die Celsiustemperatur t

$$c' = \sqrt{1{,}4} \,.\, c = 332\sqrt{1 + \frac{1}{273}t} \tag{9.}$$

in Übereinstimmung mit der Erfahrung (vergl. Üb. 5). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Gasen berechnete zuerst Newton unter Vernachlässigung der Temperaturänderungen; Laplace verdankt man die Verbesserung dieses Fehlers.

Übungen.

1. Die Physiker E. H. und W. Weber spannten eine Baumwollenschnur so, daſs der freie Teil derselben 16,622 m lang war, mit 1) 610,5, 2) 2027,5, 3) 4226,4 Gramm und beobachteten die Zeit, die eine Welle brauchte um die freie Länge hin und zurück zu durchlaufen. Diese war bei den drei Versuchen 46, bez. 24,8 und 16,25 Tertien ($\frac{1}{60}$ sec). Da die freie Länge der Schnur 52,612 Gramm wog, so läſst sich die beobachtete Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der nach Formel 6. berechneten vergleichen. Man findet z. B. für den zweiten Versuch: Beobachtung: 80,429 m : sec, Rechnung 79,254. (Wüllner.)

2. Das Verhältnis der Schwingungszahlen des Transversal- und des Longitudinaltons einer Saite ist gleich der Wurzel aus der Verlängerung der Längeneinheit der Saite, welche das spannende Gewicht erzeugt. Beweis.

2ᵇ. Cagniard de la Tour fand, daſs die Schwingungszahl des Transversaltons einer Saite von 14,8 m Länge zu der des Longitudinaltons das Verhältnis 0,0593 hatte. Die Saite zeigte eine Ausdehnung von 50 mm infolge des spannenden Gewichts. Man prüfe den in Üb. 2. angegebenen Satz und gebe das Intervall der Töne nach temperierter Skala an.

3. Eine Saite aus Stahl vom spec. Gewichte 7,7 hat 1 m Länge und wird durch 1 kg gespannt. Wie dick muſs sie sein, um einen beliebig zu wählenden Ton als Grundton ihres Klanges zu geben und wie stark muſs eine Saite von gleichen Dimensionen gespannt werden, um mit jener vier Stöſse zu geben?

Lösung: *D* giebt die Saite bei 0,27 mm Dicke und zu vier Stöſsen sind 1112 oder 894 g Spannung nötig. Für *A* sind die entsprechenden Zahlen 0,18 mm, 1074 und 928 g. Für c''' 0,019 mm, 1008 und 992 g.

3ᵇ. Welche Grundtöne geben die beiden [40, Üb. 14] beschriebenen Stahldrähte, wenn sie als Saiten transversal bez. longitudinal schwingen?

4. Chladni lieſs 2 Fuſs lange, an beiden Enden freie Stäbe schwingen und erhielt als Longitudinaltöne d_4, g_4, cis_5 wenn der Stab bez. aus 15 lötigem Silber, Kupfer, Eisen bestand. Die specifischen Gewichte dieser Stoffe sind 10,47; 8,78; 7,74, die Elasticitätskoefficienten 7 140; 10 519; 20 794 (kg pro qmm). Aus letzteren Angaben berechne man das Verhältnis der Schwingungszahlen und vergleiche es mit dem, das sich nach temperierter Skala aus dem Namen der Töne ergiebt. (Wüllner.)

5. Im Jahre 1822 wurden bei Paris Versuche angestellt um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles zu ermitteln. Die Stationen *A* nnd *B* waren 18 622,27 m von einander entfernt.

In A nahm man im Mittel aus 12 Beobachtungen den Schall einer in B aufgestellten Kanone 54,84 sec nach dem Lichtblitze wahr, in B war das Mittel aus 7 Beobachtungen 54,43 sec. Die Lufttemperatur war 16° C. Wie grofs ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei 0°?

6. Man berechne aus Elasticitätskoefficient E und spec. Gewicht s die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Longitudinalwellen in den folgenden Stoffen und vergleiche sie mit der beobachteten

	E	s	c beob. (Luft = 1)
Gold	8131,5	18,51	6,424
Silber	7357,7	10,36	8,057
Zink	8734	7,008	11,007
Kupfer	12 449	8,93	11,167
Stahl	18 809	7,71	14,961

7. Im Wasser ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen nach den Beobachtungen von Colladon und Sturm im Genfer See 1435 m : sec bei 8°,1 C. Wie grofs ist sie der Theorie nach, wenn bei 8° das specifische Gewicht des Wassers 0,999 775 und der Druck einer Atmosphäre das Wasservolumen um das 0,000 049 fache verkleinert? (Man hat zunächst den Elasticitätskoefficienten des Wassers gleich 1,0336 : 0,000 049 kg pro qcm). Wie grofs ist die Geschwindigkeit bei 4°, wo die Kompressibilität des Wassers 0,000 0499.

8. Man zeige, dafs die Dimension der für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit entwickelten Formeln ist m : sec.

9. Ein Akkord, ein Konzert, macht uns im wesentlichen denselben Eindruck, aus welcher Entfernung wir es auch hören mögen. Daher pflanzt die Luft alle Tonwellen mit gleicher Geschwindigkeit fort. Man begründe diesen Schlufs. Welche Vernachlässigung, die wir bei Ableitung der Formeln für c eingeführt haben, wird dadurch gerechtfertigt?

10. Eine Reihe gleichlanger mathematischer Pendel von der Länge l ist durch gespannte Fäden verbunden, so dafs eine transversale Welle sich in der Reihe fortpflanzen kann, — oder durch Federn, so dafs eine longitudinale Welle entstehen kann. (Wellenmaschinen). Was ändert sich dann an den Entwickelungen des obigen Paragraphen? Man berechne c für diese Fälle.

11. Reflexion und Refraktion in der Punktreihe. Auf einem gespannten Seile sitzen Kugeln in Abständen a. Links vom Punkte Q des Seiles sind ihre Massen m, rechts m'. Die Spannung ist überall P. Eine von links her aus O nach Q kommende Welle erteilt einem Punkte im Abstande x von O zur Zeit t die Elongation

$$y = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right), \text{ wobei } c = \sqrt{\frac{Pa}{m}}$$

wenn $x < OQ$. Für die folgenden Punkte kann man **nicht** setzen

$$y' = r' \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{OQ}{c} - \frac{x - OQ}{c'}\right), \quad c' = \sqrt{\frac{Pa}{m'}}$$

da alsdann nicht folgenden Bedingungen genügt werden kann: 1) Für $x = OQ$ müssen beide Wellen gleiche Elongation besitzen, da ja Q sowohl Endpunkt der einen als Anfangspunkt der andern Welle ist. 2) Die nach Q kommende mittlere Schwingungsenergie mufs gleich sein der von Q fortgesendeten, da sonst in Q bei länger andauernden Wellenbewegungen unbegrenzt Energie angesammelt oder verloren werden würde. Diesen Bedingungen kann man aber genügen, wenn man von der Zeit an, wo die Welle Q erreicht hat, zwei Wellen sich fortpflanzend denkt, nämlich aufser jener von Q nach rechts fortschreitenden Welle mit den Elongationen y', eine von Q nach links zurückgehende. Wir denken uns diese, als wäre sie zur Zeit $t = 0$ in einem Punkte O' rechts von Q erregt, der so liegt, dafs $OQ = QO'$. Dann ist ihre Elongation

$$y_1 = r_1 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{OQ + (OQ - x)}{c}\right).$$

Man entwickele r_1 und r' aus r, m, m' und zeige, dafs die reflektierte Welle y_1 verglichen mit der ankommenden eine halbe Wellenlänge verloren hat, wenn $m' > m$, (d. i. bei Reflexion am dichteren Medium.)

51. Die Absorption der Schwingungen, das Mittönen — Trifft eine Wellenbewegung einen Körper, der selbst schwingender Bewegungen fähig ist, so giebt sie einen Teil ihrer Energie an diesen ab, der Körper **absorbiert** einen Teil jener Energie und gerät dadurch in eigene Schwingungen. Eine tönende Stimmgabel regt z. B. eine andere in der Nähe befindliche zum **Mittönen** an. Dieses Mittönen ist am stärksten, wenn die erregte Gabel mit der erregenden **gleich** gestimmt ist und wird schon bei geringer Verstimmung (durch Wachskügelchen) sehr schwach. Ebenso tönt eine Luftmasse von bestimmten Dimensionen nur bei solchen Tönen kräftig mit, welche sie beim Anblasen selbst geben würde. (Resonanzkästen, Helmholtz'sche Resonatoren). Jeder Körper wird nur durch diejenigen Schwingungen zu starkem Mitschwingen angeregt, die er selbst auszusenden vermag. Jeder

Körper absorbiert nur die Schwingungen, die er selbst zu emittieren vermag (nur seine Eigentöne).

Um diese Erscheinung zu erklären, denken wir uns ein mathematisches Pendel von so kleiner Amplitude, dafs seine Bewegung als harmonische betrachtet werden kann. Ist das Pendel anfangs in Ruhe und erteilt man ihm dann Stöfse nach je einer Pendelschwingung (Schaukel), so vermehrt jeder folgende Stofs die schon vorhandene Geschwindigkeit des Pendels. Anders aber, wenn die Stöfse in anderen Intervallen erfolgen. Wenn z. B. nach je einer Halbperiode ein Stofs eintritt, so vernichtet jeder folgende Stofs, die vom vorangehenden herrührende Geschwindigkeit. — Den Versuch stellt man am besten so an, dafs man mit der Hand den Aufhängepunkt des Pendels, also auch dessen Gleichgewichtslage periodisch verschiebt. Kleine Zuckungen der Hand können, wenn sie im geeigneten Tempo erfolgen, eine sehr grofse Amplitude hervorbringen.

Um die Sache algebraisch zu untersuchen, denke man sich die Gleichgewichtslage des Pendels selbst in harmonische Schwingungen von der beliebigen Periode N' versetzt, so dafs sie zur Zeit t von ihrer Anfangslage M absteht um

$$MO = A \sin 2\pi N't,$$

Zu diesem Zwecke mufs dem Pendelpunkte eine mit der Zeit veränderliche Beschleunigung erteilt werden [34 oder 44]

$$p_1 = 4\pi^2 N'^2 . A \sin 2\pi N't.$$

Gerät nun dabei der Punkt aus seiner Gleichgewichtslage um die Strecke $OP = x$, welche Verlängerung von OM sei, so wirkt zurückziehend die Beschleunigung

$$p_2 = -4\pi^2 N^2 x$$

vorausgesetzt, dafs N die Eigenperiode des Pendels ist. Der Pendelpunkt unterliegt also überhaupt der Beschleunigung

$$p = p_1 + p_2 = 4\pi^2 N'^2 . A \sin 2\pi N't - 4\pi^2 N^2 x.$$

Wenn aber der Pendelpunkt irgend eine Schwingung

$$x = \mathsf{A} \sin 2\pi \mathsf{N} t$$

ausführt, erleidet er die Beschleunigung

$$-4\pi^2 \mathsf{N}^2 \mathsf{A} \sin 2\pi \mathsf{N} t,$$

welche mit der ihm thatsächlich erteilten Beschleunigung p übereinstimmt, wenn

$$\mathsf{N} = N' \text{ und } \mathsf{A} = \frac{AN'^2}{N^2 - N'^2} = A : \left(\frac{N^2}{N'^2} - 1\right).$$

Das Mitschwingen erfolgt also im Tempo der erregenden Schwingung, nicht in dem des Eigentons, ist aber nur bei Übereinstimmung beider Töne sehr stark. Die Formel ergiebt, dafs letzternfalls die Amplitude unendlich grofs wird, während sie schon bei geringem Intervall $N : N'$ äufserst kleine Werte besitzt. In Wirklichkeit wird die Amplitude mittönender Körper nicht so grofs sein, als es die Rechnung ergiebt, insbesondere nicht unendlich grofs, weil die Energie des mitschwingenden Körpers an die Umgebung abgegeben wird, was bei Herleitung der Formel nicht in Anschlag gebracht wurde, — auch weil ein Teil der Energie zur Überwindung von Widerständen verwendet und in Wärme verwandelt wird.

Auf dem Mitschwingen elastischer Körper beruht das Hören. Die Schallwellen der Luft setzen die Teile des inneren Ohres in schwingende Bewegung, schliefslich die Fasern des Corti'schen Organs. Wahrscheinlich hat jede Faser des letzteren einen bestimmten Eigenton, dessen Empfindung durch die mit ihr verbundene Nervenfaser vermittelt wird. Nur Töne von geringem Intervall können ein und dieselbe Faser gleichzeitig in hinreichend starke Schwingungen versetzen, weshalb nur die Stöfse solcher Töne in uns die intermittierende Empfindung erregen, die wir als Dissonanz bezeichnen (Helmholtz).

Körper, die einen oder nur einige Eigentöne besitzen, verstärken in einem Tongemisch, das sie trifft, nur diese, indem sie in Mitschwingung geraten (Resonatoren). Körper, die sehr viele Eigentöne besitzen, indem sie zu sehr vielfachen stehenden Schwingungen befähigt sind, wie z. B. Platten, Membranen, Luftmassen, besonders bei unregelmäfsiger Gestaltung, verstärken das Tongemisch gleichmäfsig (Resonanzböden, akustisch gebaute Räume).

Übungen.

1. Man schlägt auf einem Klavier den Ton C an und hebt durch das Pedal den Dämpfer. Welche Saiten müssen mitklingen?

Warum ist das Mitklingen schwächer bei temperierter als bei reiner Stimmung?

2. Welche Mittel giebt es, um einen Ton auf einen andern abzustimmen?

XIII. Anwendung der Wellenlehre wesentlich auf optische Erscheinungen.

52. Die Grundlagen der Optik. — Geeigneter zur Erklärung der Lichterscheinungen als die Emissionshypothese Newtons [43], erwies sich die von dessen Zeitgenossen Huyghens 1690 aufgestellte Undulationshypothese des Lichtes. Sie erklärt die Lichterscheinungen nach Analogie der Schallerscheinungen als hervorgerufen durch Wellenbewegungen, die sich vom leuchtenden Körper bis zu unserm Auge fortpflanzen, (während die Emissionshypothese die Lichterscheinungen nach Analogie der Geruchsempfindungen sich zustande kommend denkt). Da sich nun das Licht auch durch den Weltraum, auch durch die Torricelli'sche Leere fortpflanzt, so kann der Stoff, der die Wellenbewegung fortpflanzt, welche wir als Licht empfinden, nicht ein uns durch andere Eigenschaften schon bekannter Körper sein. Diesen hypothetischen Stoff, von dem wir also nichts wissen, als dafs er die Energie fortpflanzt, die wir als Licht empfinden, nennt man den Äther. Dieser Stoff oder dieses Medium der Wellenbewegung erfüllt den Weltraum und wir haben kein Mittel, den Äther aus einem Raume zu entfernen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Äther des Weltraums ist 300 Millionen m : sec und ist nach vier verschiedenen Methoden bestimmt worden: 1) von Olaf Römer 1675 durch die Verfinsterungen der Jupitersmonde; 2) von Bradley 1727 durch die Aberration des Fixsternlichtes; 3) von Fizeau 1849 durch das rotierende Zahnrad; 4) von Foucault 1854 durch den rotierenden Spiegel [vergl. 43].

Wir haben ein Mittel, um die Ätherbewegung in ihre einzelnen, nicht weiter zerlegbaren, Bestandteile zu zerlegen. Dieses Mittel ist die Herstellung eines Spektrums durch Brechung (Newton) oder durch Beugung. Nur ein Teil des Spektrums, das Lichtspektrum ist dem Auge wahrnehmbar, andere Teile erregen keine Lichtempfindung, wie ja auch nicht alle Schwingungen der

Luft Schallempfindungen erzeugen. Wir wissen von den Ätherwellen, daſs sie eine oder mehrere der folgenden drei Erscheinungen hervorbringen können: 1) sie können die Körper erwärmen und zum Leuchten bringen d. h. ihren Molekeln kinetische Energie erteilen, und in uns die Wärmeempfindung erzeugen, wenn sie unsere Haut treffen; 2) sie können Lichtempfindungen in uns erzeugen, wenn sie die Netzhaut unseres Auges treffen; 3) sie können chemische Wirkungen hervorbringen.

Jede unserer Lichtempfindungen läſst zwei Eigenschaften erkennen, die Stärke oder Intensität und die Farbe. Nach der Undulationshypothese wächst die Stärke der Lichtempfindung mit der Energie der sie hervorrufenden Ätherschwingungen. Ferner hängt die Farbe, wenn sie sich im Spektrum vorfindet, ab von der Schwingungszahl der die Empfindung erzeugenden Ätherschwingung; jede Spektralfarbe wird erzeugt von einer einfachen Wellenbewegung, jede andere Farbe von einem Gemisch solcher.

In den folgenden Paragraphen wird gezeigt werden, wie sich aus diesen und den daselbst noch weiter einzuführenden Annahmen der Undulationshypothese die optischen Erscheinungen erklären und voraussagen lassen.

Während im Laufe des 18. Jahrhunderts die Huyghens'sche Hypothese wenig beachtet worden war, verdrängte sie die Emissionshypothese Newtons vollständig, als Fresnel 1815 zeigte, daſs nur auf den Grundlagen der Huyghens'schen Annahmen sämtliche optische Erscheinungen erklärt werden können. In der von Fresnel ihr gegebenen Gestalt hat die Undulationshypothese wiederholt die Feuerprobe einer zweckentsprechenden Hypothese bestanden, indem die Erfahrung Erscheinungen bestätigte, die, vorher unbekannt, aus ihren Annahmen mathematisch vorausgesagt worden waren. Sie hat sich damit als eine unser Wissen vereinfachende und bereichernde Hypothese erwiesen.

53. Die allseitige Ausbreitung der Energie. — Wenn eine Stelle O eines elastischen Mediums in Schwingung versetzt wird, so giebt sie die ihr mitgeteilte Energie an die benachbarten Punkte ab und es pflanzen sich in allen von ihr ausgehenden Punktreihen Wellen fort. Die Richtungen der Fortpflanzung heiſsen Strahlen. Ist die Verteilung der schwingenden Punkte auf allen

von O ausgehenden Richtungen die gleiche, wirken auch auf alle Punkte die gleichen elastischen Kräfte, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in allen Punktreihen die gleiche [50], und das Medium wird isotrop genannt. In einem solchen Medium erregt die von einem Punkte O ausgehende Energie gleichzeitig alle Punkte einer Kugelfläche um O, welche die Wellenfläche für diesen Augenblick genannt wird.

Es sei der dem Punkte O ursprünglich in einem Augenblicke mitgeteilte Energievorrat E. Nach Ablauf der Zeit t ist derselbe nicht mehr in O vorhanden, sondern gleichmäfsig über alle Punkte einer Wellenfläche mit dem Radius $x = ct$ verteilt, so dafs auf die Flächeneinheit die Energie $E' = E : 4\pi x^2$ entfällt. Die Energie, welche durch die Wellenbewegung einer zum Strahl normalen Schicht des Mediums erteilt wird, oder die Intensität ihrer Beleuchtung ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstands dieser Schicht vom Erregungsmittelpunkte. Die Beobachtung am Photometer bestätigt dies.

Von der Beleuchtungsintensität einer Fläche hängt die Stärke der Lichtempfindung ab, die sie in uns hervorruft. Auch die Stärke der Schallempfindung hängt von der sie erzeugenden Energie ab, welche nach demselben Gesetze abnimmt, wenn sich die Schallwellen allseitig ausbreiten können.

Die Abnahme mit dem Quadrate der Entfernung findet nicht mehr statt, wenn durch Reflexion und Refraktion die Ausbreitung der Energie auf Kugelflächen verhindert wird (Brennspiegel und Brennlinsen, — Sprachrohr, Hörrohr).

Je kleiner die von den Wellen getroffene Fläche ist, um so mehr ist es gestattet, die sie treffenden Strahlen als parallele Gerade, das in Betracht kommende Stück der Wellenfläche als eben zu betrachten. Trifft auf die Flächeneinheit eines derartigen kleinen ebenen Flächenstücks die Energie E', wenn die Ebene normal zu den Strahlen steht, so verteilt sich diese selbe Energie auf die gröfsere Fläche $1 : \cos\varphi$, wenn die auffangende Ebene den Winkel φ mit der Wellenfläche bildet. Die Flächeneinheit einer schief gegen die Strahlen gestellten Ebene empfängt also die Energie

$$E'' = E' : \frac{1}{\cos\varphi} = E' \cos\varphi$$

wenn φ den Winkel der Ebenennormale gegen die Strahlen bezeichnet. Ein Körper wird daher wärmer, wenn die Sonnenstrahlen senkrecht auf seine Oberfläche treffen, als wenn sie schräg auffallen, wodurch sich die tägliche und jährliche Periode der Lufttemperatur erklärt.

Übungen.

1. Sei Q die Wärme in Calorien, die im Abstande der Erde 1 qdm von der Sonne empfängt pro min. Wieviel Calorien empfängt 1 qdm des Merkur, des Neptun, des nächsten Fixsterns? Wie grofs ist die von der Sonne pro min. ausgesendete Energie in Calorien, in Metertonnen?

2. Am Photometer zeigt sich, dafs zwei Lichtquellen gleiche Intensität geben, wenn ihre Abstände vom Instrumente x bez. x' sind. Wie verhalten sich die Leuchtkräfte (auch Intensitäten genannt) beider Lichtquellen?

3. Man beweise, dafs in der Entfernung x von der Lichtquelle die Elongation der Schwingungen ist

$$y = \frac{\alpha}{x} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

wenn α die Elongation im Abstande 1 bezeichnet. (Man berechne zuerst die mittlere Schwingungsenergie, die in den Abständen 1 und x stattfinden mufs).

54. Das Prinzip von Huyghens. — Schreitet in einer Punktreihe vom Erregungspunkte O aus eine Wellenbewegung fort, so wird dieselbe einem beliebigen Punkte P in der Entfernung $OP = x$ zur Zeit t die Elongation erteilen

$$y = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Nun geschieht doch das Fortschreiten der Welle so, dafs sich die Energie von Punkt zu Punkt überträgt; jeder Punkt verdankt seine Energie zunächst dem vorangehenden Nachbar, weiterhin also irgend einem vorangehenden der Reihe. Es mufs daher die Elongation y sich auch dann ergeben, wenn man die Welle in einem zwischen O und P liegenden Punkte A erzeugt denkt, mit andern Worten, wenn man die Schwingung des Punktes A als Ursache der von P auffafst. Ist t_a die Zeit, wo A zu schwingen

beginnt, $OA = a$, also $a = ct_a$, so ist nach dieser Auffassung die Elongation in P

$$r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - t_a - \frac{x-a}{c}\right)$$

und das ist in der That identisch mit y.

Pflanzt sich die Wellenenergie von dem Punkte O eines isotropen Mediums allseitig fort, so gelten die entsprechenden Erwägungen. Es mufs gleichgültig sein, ob man den eigentlichen Erregungspunkt als Energiequelle betrachtet oder andere später erregte Punkte, wenn nur der Punkt, dessen Schwingung man betrachtet, noch später getroffen wird als diese. Oder: Seine Schwingungsenergie verdankt jeder Punkt den in einem früheren Augenblick erschütterten Punkten und es ist in vielen Fällen zweckmäfsig nicht bis auf die ursprünglich erschütterten Punkte, d. i. bis auf die Erregungsstelle, zurückzugehen.

Nachdem also von O aus die Punkte A der Kugelfläche A erregt worden sind, kann man sich denken, dafs nunmehr diese

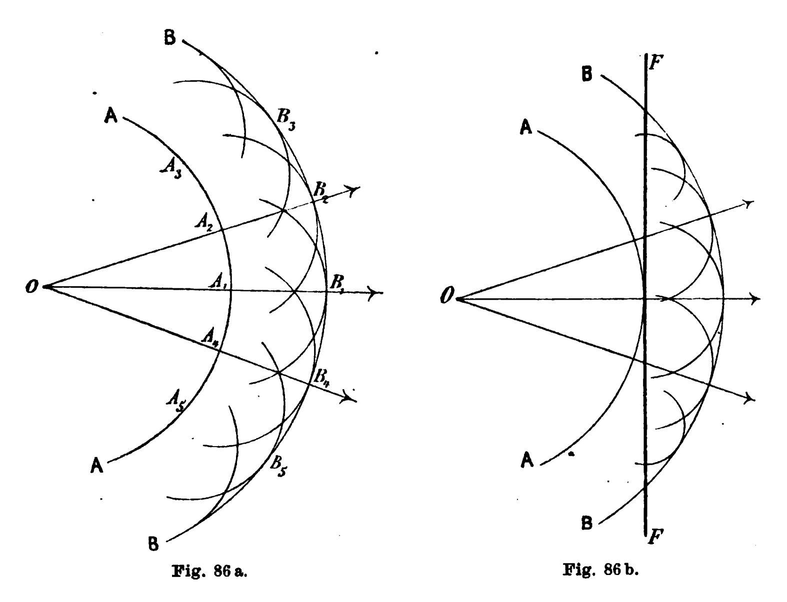


Fig. 86 a. Fig. 86 b.

die Energiequellen bilden. Jeder sendet nun eine Wellenbewegung, eine Partialwellenbewegung aus, deren Beschaffenheit wir zwar im Einzelnen nicht kennen (sie kann abhängen von der Art, wie

ihr Mittelpunkt erregt wurde), von der aber feststeht, erstens, dafs sie in Kugelwellen fortschreitet, weil das Medium isotrop ist und zweitens, dafs sie mit allen übrigen Partialwellenbewegungen dergestalt interferiert, dafs in irgend einem späteren Augenblick alle vorhandene Energie in den Punkten *B* einer mit A koncentrischen Kugelfläche B, einer Hauptwellenfläche vorhanden ist. Diese Fläche B ist die umhüllende Fläche der Partialkugelflächen; jeder Punkt *B* derselben liegt nur auf einer Partialkugelfläche, so dafs in ihm Interferenz unmöglich ist.

In allen Fällen, wo sämtliche Partialwellen sich ausbilden können, verhält es sich ebenso; es ist dann immer die spätere

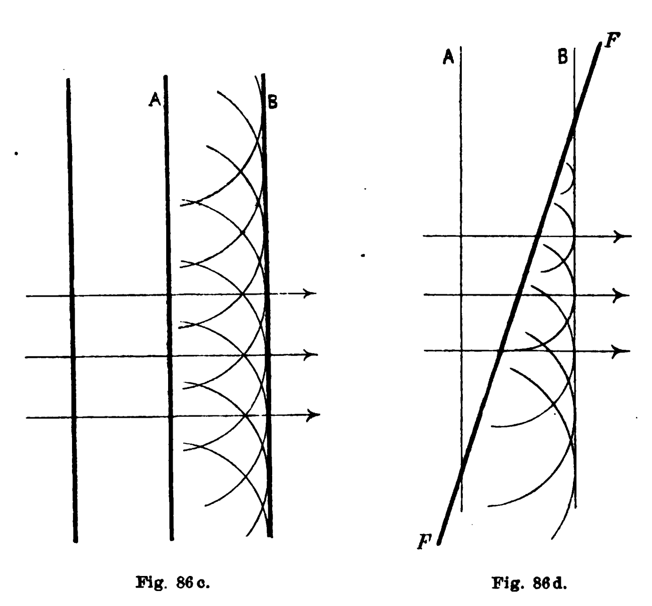


Fig. 86c. Fig. 86d.

Hauptwelle B eine umhüllende Fläche der sämtlichen Partialwellen, die von einer früher erregten Wellenfläche A oder einer beliebigen früher erregten Fläche *F* ausgehen, wie aus nebenstehenden Figuren 86 *a* bis *d* für einige wichtige Fälle ersichtlich ist.

55. Beugungs- und Schattenerscheinungen. — Wenn die Partialwellen, die von einer Hauptwelle ausgehen, nicht sämtlich zustande kommen können, weil ein Schirm die Fortpflanzung ihrer Energie hindert, so kommt im allgemeinen auch keine wei-

tere Hauptwelle zustande und die in irgend einem Punkte entstehende Schwingung ist Ergebnis der Interferenz aller dorthin gelangenden Partialwellen.

Es möge z. B. eine ebene Welle, d. i. eine Kugelwelle von so fernem Erregungspunkte, daſs das in Betracht kommende Stück als eben bezeichnet werden kann, von einem Schirm SS aufgefangen werden, dessen Ebene den Wellenebenen parallel steht.

Wäre es nun möglich, in dem Schirme eine punktförmige Durchbohrung anzubringen, so daſs nur die in dieser Öffnung O entstehende Partialwelle Energie hinter den Schirm senden könnte, so würde sich diese gleichmäſsig hinter dem Schirme ausbreiten und jeder Punkt P von O aus bestrahlt werden. Der den Schirm in O treffende Strahl würde also dort nach allen Richtungen sich auflösen, sich dort umbiegen.

Wesentlich dieselbe Erscheinung muſs man auch dann erhalten, wenn die Öffnung nicht in einem einzigen Punkte besteht, sondern O Mittelpunkt einer breiteren Spalte AB ist, wenn nur in jedem Punkte P der Wegunterschied $AB - OP$ dort interferierender Partialwellen gering ist gegen eine halbe Wellenlänge $\frac{1}{2}\lambda$. Das ist der Fall, wenn AO selbst klein ist gegen $\frac{1}{2}\lambda$ oder die Spaltbreite AB klein gegen λ. So biegen oft Schall- und Wasserwellen, wenn sie durch eine Öffnung hindurchschreiten um die Ränder allseitig um.

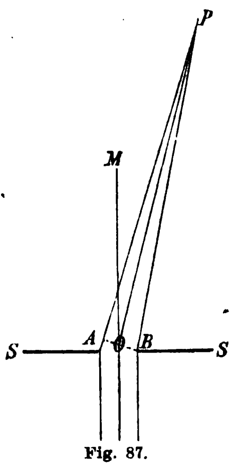


Fig. 87.

Ganz anders gestaltet sich die Erscheinung, wenn AB nicht sehr klein ist im Vergleich mit λ. Wenn es Punkte giebt — P sei ein solcher —, für welche $AP - OP = \frac{1}{2}\lambda$ und wenn P fern genug von O ist, um die Strahlen AP und OP als parallel ansehen zu können, so vernichten sich diese Strahlen durch Interferenz in solchen Punkten P. Dann vernichtet aber jeder Strahl der von einem Punkte X der linken Öffnungshälfte AO ausgeht, einen von einem Punkte Y der rechten Hälfte kommenden, der so liegt, daſs $AX = OY$: es vernichten sich also sämtliche Partialwellen, nach P kommt keine Schwingungsenergie. Dasselbe gilt für alle Punkte der Richtung OP, wenn sie nur fern

genug von O sind, um die zu ihnen gelangenden Strahlen als parallel ansehen zu dürfen, oder wenn in ihnen ein Auge oder ein Fernrohr sich befindet, das überhaupt nur parallele Strahlen vereinigt. Diese energielose Richtung wird bestimmt durch ihren Winkel $\alpha_0 = POM$ gegen den Mittelstrahl OM. Für α_0 gilt die Gleichung

$$OA \,.\, \sin\alpha_0 = \tfrac{1}{2}\lambda$$

oder, wenn die Spaltbreite AB mit b bezeichnet wird,

$$\sin\alpha_0 = \frac{\lambda}{b}\cdot$$

Ebenso tritt Vernichtung der Energie in jeder Richtung α ein, für welche

$$\frac{1}{n}\cdot OA\cdot\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\lambda\,,$$

$$\sin\alpha = n\cdot\frac{\lambda}{b}\,,$$

wo n eine ganze Zahl. Denn denkt man sich AB in $2n$ gleiche Teile geteilt, so vernichtet dann die dem ersten Teil entstammende Energie die vom zweiten kommende, weiter zerstören sich die Energien des dritten und vierten Teils u. s. f. bis zum letzten.

In allen Richtungen β aber, für welche

$$\sin\beta = (n + \tfrac{1}{2})\frac{\lambda}{b}\,,$$

bleibt die Energie eines der $m = 2n + 1$ Teile unzerstört.

Diese ist das $1 : m^2$-fache der Gesamtenergie des Spaltes, sofern die von allen Strahlen erzeugte Amplitude als das m-fache der von den Strahlen eines m-tels des Spaltes hervorgebrachten angesehen werden darf. Es zeigt sich daher in den Richtungen β um so geringere Intensität, je mehr sie sich von der Mittelrichtung entfernen. Von dieser ab bis zum Winkel β_0, für den

$$\sin\beta_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{b}\,,$$

herrscht gröfste Intensität, weil in diesem Gebiete nicht irgend zwei der ankommenden Strahlen sich völlig vernichten können.

Die Erfahrung bestätigt diese Ergebnisse der Theorie. Je kleiner b ist gegen λ, um so gröfser ist α_0, die erste Richtung von der Mitte ab, in der sich die Bewegungen zerstören, um so mehr verteilt sich also die Energie hinter dem Schirme, um so stärker biegen die Strahlen um.

Ist b grofs im Vergleich mit λ, doch nur so grofs, dafs die aufeinander folgenden Werte der α und β beträchtlich verschieden sind, so tritt das Beugungs- oder Inflexionsphänomen ein, wie es bei Anwendung von Lichtwellen und schmalen Spalten beobachtet wird. Eine Reihe von Spaltbildern von rasch abnehmender Intensität folgen sich in Abständen, die nahezu $\lambda : b$ sind.

Je gröfser b, um so dichter folgen sich die Spaltbilder, um so mehr rückt die Erscheinung nach der Mitte zusammen, da man die Spaltbilder von höherer Ordnungszahl n wegen der geringen Intensität nicht mehr unterscheiden kann.

Bei hinreichend grofser Öffnung tritt daher an Stelle des Beugungsbildes der Schatten und eine letzte Spur der Beugung zeigt sich nur noch in dem schmalen Streifen an der Schattengrenze, wo das Licht in die Dunkelheit übergeht.

Übungen.

1. Ein Spalt von 0,5 mm Breite gab bei Anwendung roten Lichtes auf einem Schirme in 1,5 m Abstand ein Beugungsbild, dessen erster dunkler Streifen von der Mitte um 2 mm abstand. Bei blauer Beleuchtung war der Abstand 1,4 mm. Wie grofs ist Wellenlänge und Schwingungszahl des roten und des blauen Lichtes? (Müller-Pfaundler.)

2. Schwerd fand durch ein rotes Glas blickend bei 1,353 mm breitem Spalte die dunkeln Streifen von der Mitte ab in folgenden Winkelabständen: $1' 41''$, $3' 18''$, $4' 55''$, $6' 27''$. In wiefern bestätigen diese Zahlen die Theorie? Wie grofs ist der Abstand zweier Streifen im Mittel, wie grofs Wellenlänge und Schwingungsdauer? (Müller-Pfaundler.)

3. Die Grenzen des Lichtspektrums sind etwa die Linien A und H_2 des Sonnenspektrums. Angström hat für diese die Wellenlängen 760,4 und 393,30 Milliontel mm gemessen. Wie grofs sind die entsprechenden Schwingungszahlen, wieviel Oktaven und wieviel Töne temperierter Skala umfafst unsere Lichtempfindung?

4. Die Wellenlängen der Spektrallinien C 656, D 590, E 527, F 486, G 431 Milliontel mm verhalten sich wie die der gleichnamigen Töne. Welchen Tönen entspricht dann H_2 (393) und Q im Ultraviolett (328)?

5. In einem Schirme befinden sich zwei parallele Spalten von der Breite b und dem Abstande d der entsprechenden (linken) Ränder. Aufser in den Richtungen α tritt dann noch Dunkelheit ein in den Richtungen α', wo jeder Strahl des einen Spaltes den

entsprechenden des andern vernichtet. Man bestimme diese α'. Nicht in allen Richtungen β', in denen sich die entsprechenden Strahlen beider Spalten verstärken, tritt ein Intensitätsmaximum auf. In welchen nicht? (Beugungsgitter.)

56. Reflexion und Refraktion. — Wenn ein an dem einen Ende befestigtes Seil durch Erschütterung des andern Endes zu fortschreitenden Wellen erregt wird, so treten an dem befestigten Ende die Erscheinungen der Reflexion und Refraktion ein: ein Teil der Energie pflanzt sich rückwärts das Seil entlang fort, während ein anderer an den Körper abgegeben wird, an dem das Seil befestigt ist. Ist dieser Körper nicht eine Wand, sondern ein dünneres oder dickeres Seil als das erste, so kann man auch sehen, dafs die ihm mitgeteilte Energie in ihm Wellenbewegung hervorbringt. Während die in dem ersten Seile zurückschreitende Welle die zurückgeworfene oder reflektierte Welle heifst, nennt man die in das zweite Seil übergegangene die transmittierte oder gebrochene Welle. Wie die Theorie der Wellenbewegung diese Erscheinungen zu erklären vermag, ist in [50, Üb. 11] auseinandergesetzt worden.

Denken wir uns zwei verschieden dichte isotrope Medien durch eine ebene Fläche von einander abgegrenzt und in dem ersten eine Wellenbewegung fortschreitend. Die Punkte der Grenzfläche GG, die von der Wellenbewegung getroffen werden, geben ihre Energie teils an die Punkte des ersten Mediums zurück, reflektieren sie, teils an die Punkte des zweiten Mediums vorwärts oder transmittieren sie. Denken wir uns zunächst, eine ebene Welle komme im ersten Medium an. Sie erschüttert in einem bestimmten Augenblicke alle Punkte der Ebene A_1D_1, eine Zeiteinheit später die Ebene A_2D_2 und würde nach wieder einer Zeiteinheit A_3D_3 erreichen, wenn statt des zweiten Mediums noch das erste vorhanden wäre. Es würde dann in dieser Zeiteinheit die in A_2 erzeugte Partialwelle die Ebene A_3D_3 erreicht haben. Statt dieser Partialwelle entstehen aber in A_2 zwei Wellen, die reflektierte Partialwelle, die in der betrachteten Zeit ebensoweit ins erste Medium zurück nach A_3' gelangt und die transmittierte Partialwelle, die in derselben Frist A_3'' erreicht. Stellt man diese Betrachtung für alle Punkte zwischen A und D an, so ergiebt sich aus geometrischen Gründen leicht, dafs alle reflektierten Partialwellen die Hauptwellenfläche $A_3'D_3$ tangieren, alle transmittierten aber die

Hauptwellenfläche $A_3''D_3$. Die Richtungen, in denen sich von diesen Wellenflächen aus die Energie weiter fortpflanzt, sind in

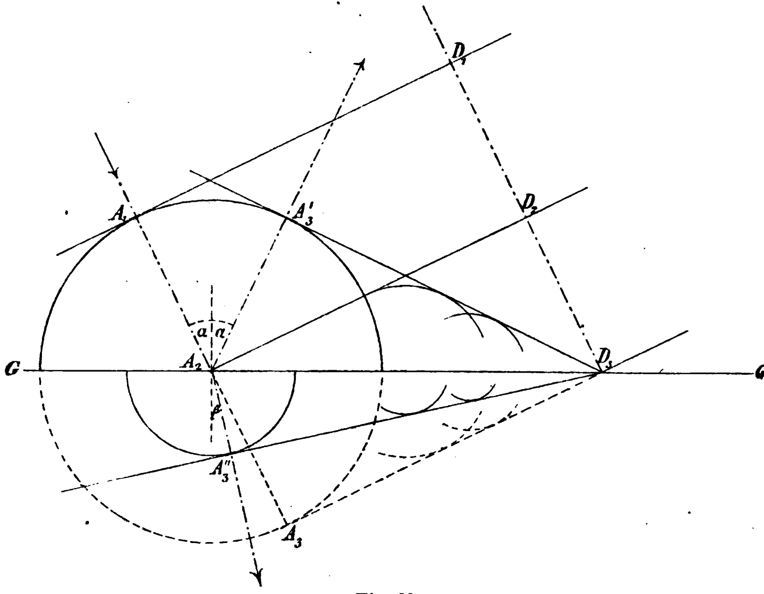


Fig. 88.

der Figur angegeben; sie heifsen der reflektierte bez. der gebrochene Strahl. Aus der Kongruenz der Dreiecke $A_2D_2D_3$ und $D_3A_3'A_2$ (sowie $D_3A_3A_2$) folgt das Reflexionsgesetz:

Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel und beide liegen in derselben Ebene.

Aus den Dreiecken $A_2D_3A_3$ und $A_2D_3A_3''$ folgt, wenn c_1 und c_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in beiden Medien und α den Einfalls-, β den Brechungswinkel bezeichnen,

$$A_2D_3 \sin\alpha = A_2A_3\,, \qquad A_2D_3 \sin\beta = A_2A_3''\,,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{A_2A_3}{A_2A_3''} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Die Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels stehen im Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen in den entsprechenden Medien und beide Winkel liegen in derselben Ebene.

Der Quotient beider Geschwindigkeiten, der gröfser als 1 ist, heifst der relative Brechungsexponent der Medien.

Die Teile der Partialwellen, die nicht von gemeinsamen Hauptwellenflächen berührt werden, zerstören sich nach dem Huyghens'schen Prinzip oder geben zu Beugungserscheinungen Veranlassung.

Wir stellen noch nach denselben Grundsätzen die von einer Kugelwelle, welche in O erzeugt sei, hervorgebrachten Reflexions- und Refraktionserscheinungen dar. Die reflektierte Welle ist eine Kugelwelle, deren Mittelpunkt O_1 symmetrisch liegt zum Mittelpunkt der ankommenden Wellen in Bezug auf die Grenzebene der

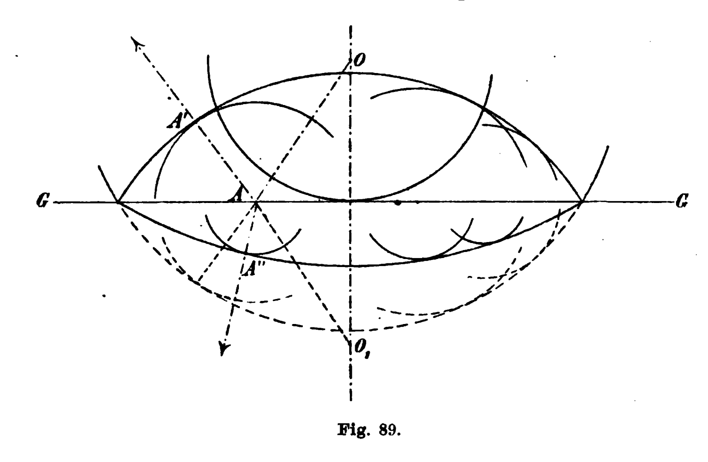


Fig. 89.

Medien. Die gebrochenen Partialwellen umhüllen eine krumme Fläche, die keine Kugelfläche ist, die gebrochenen Strahlen kommen nicht aus einem Punkte. Die Richtungen der Strahlen bestimmt man durch Tangentialebenen an die Wellenflächen in den betrachteten Punkten; da diese Ebenen zugleich die durch dieselben Punkte gehenden Partialwellen berühren, so führt ihre Betrachtung wieder auf das für ebene Wellen Abgeleitete zurück.

Wasser-, Schall- und Lichtwellen zeigen nun wirklich die hier entwickelten Erscheinungen, wenn sie an die Grenze des Mediums gelangen, in dem sie sich fortpflanzen. Um die Reflexion und Refraktion des Lichtes als Reflexion und Refraktion von Wellenbewegungen auffassen zu können, nimmt die Undulationshypothese an, dafs in jedem Körper sich Äther befindet, von anderer Beschaffenheit als in anderen Körpern und als im leeren Raume, so dafs im Äther eines jeden Körpers sich das Licht mit

einer diesem Äther eigentümlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit fortpflanzt. Der Körperäther umgiebt die Molekeln, diese sind in ihn eingelagert; ihre anziehenden Kräfte mufs man als Ursache der besonderen Beschaffenheit ansehen, die der Äther in den aus diesen Molekeln gebildeten Körpern besitzt.

57. Dispersion, Absorption, Emission. Die Erscheinung der Farbenzerstreuung oder Dispersion, welche sich bei der Brechung gemischten Lichtes zeigt, erklärt die Undulationshypothese durch die Annahme, dafs im Körperäther die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, daher auch die Wellenlänge für das Licht verschiedener Schwingungszahlen verschieden sei. Dieses Verhalten des Körperäthers weicht freilich von dem Verhalten der elastischen Körper gegen Schallwellen und dem Verhalten des Äthers im Vakuum ab; die Undulationshypothese vermag aber einen hinreichenden Grund für das abweichende Verhalten des Körperäthers anzugeben. Der in [50] entwickelten Theorie zufolge ist nur dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c unabhängig von der Wellenlänge $\lambda = cT$, wenn das Medium der Fortpflanzung aus Molekeln besteht, deren Abstand a verschwindend klein ist gegen λ; nur dann ist der Übergang von Formel 4 zu Formel 5 zulässig. Das trifft nun für den Körperäther, dessen Zusammenhang an unzählig vielen Stellen durch die Körpermolekeln unterbrochen wird, nicht zu, wenn es sich um Wellen von so geringer Wellenlänge, wie die Lichtwellen, handelt. Die Abhängigkeit zwischen c und T ist eine sehr verwickelte, bei verschiedenen Substanzen verschieden. Das Spektrum, das durch Brechung des Lichtes in einem Medium entsteht, weicht also in seiner Breite und der Breite seiner einzelnen Teile, vom Beugungsspektrum in einer dem betreffenden Medium eigentümlichen Weise ab.

In den meisten Körpern ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner für Wellen kleinerer Schwingungsdauer. (Der Brechungsexponent für Violett gröfser als für Rot.) Doch auch davon giebt es Ausnahmen; es giebt Körper, die verschiedene Schwingungszahlen (verschiedene Farben) mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen: Anomale Dispersion.

Die Annahme der Undulationshypothese, dafs alle Molekeln eines jeden Körpers von Äther umgeben seien, erklärt die Er-

scheinung der Absorption des Lichtes oder des Mitschwingens der Körperatome und -molekeln, wie sie sich in der Erwärmung der Körper und der chemischen Veränderung derselben durch Ätherwellen kundgiebt, sowie in der Erregung der Molekeln zu Schwingungen, die wir wieder als Licht empfinden, in besonderen Fällen als Fluorescenz- und Phosphorescenzlicht. Welche Schwingungen des Äthers von den Molekeln eines Körpers absorbiert werden, zeigt die prismatische Zerlegung des durch den Körper gegangenen Lichtes, das Absorptionsspektrum, ebenso wie das Emissionsspektrum die Schwingungen kennen lehrt, die der Körper aussendet, wenn seine Molekeln ihre Schwingungsenergie an den umgebenden Äther abgeben.

Nach der Theorie des Mittönens [51] mufs jeder Körper diejenigen Wellen absorbieren, die er selbst emittiert, wenn seine Molekeln in den — infolge ihrer gegenseitig. ausgeübten Kräfte — ihnen eigentümlichen Perioden schwingen. Von den zwischen jeder Molekel und dem umgebenden Äther wirkenden Kräften hängt es eben sowohl ab, den wievielten Teil ihrer Energie eine schwingende Molekel an die Umgebung abgiebt, als auch den wievielten Teil der Energie des umgebenden Äthers sie aufnimmt

Nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion und dem Energiegesetze kann man schliefsen, dafs sich beide Bruchteile gleichen. Angenommen, es grenzen zwei Medien aneinander, deren zweites einen Teil der Energie. die im ersten an die Grenzschicht kommt, zu absorbieren vermag. Kommt im Medium I, dessen Dichtigkeit μ_1 sei, die Energie an und erteilt jedem Punkt der Grenzschicht die Geschwindigkeit v_1, so ist die in der Volumeinheit vorhandene Bewegungsgröfse $\mu_1 v_1$. Nach der Absorption ist ein Teil derselben im Medium II vorhanden, ein anderer bleibt in I. Hat nun jeder Punkt an der Grenzschicht nach der Absorption in jenem Medium die Geschwindigkeit v_2, in diesem v_2', so ist aus dem Gesetze der Aktion und Reaktion zu schliefsen:

$$\mu_1 v_1 = \mu_1 v_1' + \mu_2 v_2 .$$

Das Energiegesetz liefert ferner die Gleichung

$$\frac{1}{2} \mu_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \mu_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} \mu_2 v_2^2 .$$

Aus diesen Gleichungen, die übrigens mit denen des elastischen

Stosses [41] und mit denen für die Reflexion und Refraktion der Wellen [50, Üb. 11] übereinstimmen, kann man das Verhältnis A der absorbierten Energie $\frac{1}{2}\mu_2 v_2^2$ zur angekommenen Energie $\frac{1}{2}\mu_1 v_1^2$ berechnen. Kommt nun zweitens im Medium II Energie an die Grenzschicht heran, von der ein Teil in das erste übergeht, emittiert wird, ein anderer dem Medium verbleibt, so gelten entsprechend die Gleichungen

$$\mu_2 v_2 = \mu_2 v_2' + \mu_1 v_1 \qquad \frac{1}{2}\mu_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\mu_2 v_2'^2 + \frac{1}{2}\mu_1 v_1^2,$$

welche für das Verhältnis der emittierten Energie $E = \frac{1}{2}\mu_1 v_1^2$ zur angekommenen Energie $\frac{1}{2}\mu_2 v_2^2 = e$ ebenfalls den Wert A liefern.

Nennt man also die Energie einer Molekel e, eine Gröfse, die nur von der Temperatur der Molekel abhängt, ferner die emittierte Energie E, und nimmt an, dafs die Molekel das A-fache der Energie des umgebenden Äthers absorbiert, so mufs sein

$$A = \frac{E}{e}, \quad e = \frac{E}{A}.$$

Das Emissionsvermögen E eines Körpers steht zum Absorptionsvermögen A desselben für dieselbe Gattung von Ätherschwingungen in einem allen Körpern gemeinsamen, nur von der Temperatur abhängigen Verhältnis. Dieses Gesetz der Emission und Absorption hat Kirchhoff erkannt und seine Allgemeingültigkeit bewiesen ohne sich auf die oben benutzte Hypothese zu stützen, dafs zwischen dem Äther und den Molekeln Energieaustausch wie zwischen elastischen Körpern stattfindet.

Übungen.

1. Man gebe die Gründe dafür an, dafs die Fortpflanzung des Lichtes durch Körper hindurch im Körperäther stattfindet, nicht in den Molekeln. Pflanzen diese die von ihnen absorbierte Energie auch fort?

2. Man zeichne die Figg. 88 u. 89 für den Fall, dafs das zweite Medium die gröfsere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt. (Totalreflexion.)

3. Wie unterscheidet sich die Absorptionsfähigkeit der Substanzen, die Linienspektren geben, von der der Substanzen mit Streifen- oder Bandenspektren?

4. Ein kalter Körper werde allmählig immer wärmer gemacht. Die Erfahrung lehrt, dafs sein Emissionsspektrum sich mit stei-

gender Temperatur immer mehr nach dem brechbareren Ende ausdehnt und immer intensiver wird. (Petroleum- und Gaslicht im Vergleich mit elektrischem Licht, Sonnenlicht.) Was folgt hieraus für die Emissions- sowie weiter für die Absorptionsfähigkeit der Körper?

5. Zwei Körper von gleicher Temperatur befinden sich in einem Raume von derselben Temperatur. Wie erklärt die Undulationshypothese die Unveränderlichkeit der Temperatur? Wie erklärt sie die Erwärmung und Abkühlung eines Körpers durch einen andern?

6. Im Mittelpunkte eines kugelförmigen Raumes werden Wellen erzeugt. Wie pflanzen sich die an der Oberfläche reflektierten und die dort nach aufsen transmittierten Wellen fort? (Ohne Benutzung der Strahlen zu beantworten.)

7. Im Brennpunkt eines Rotationsparaboloids werden im isotropen Medium Wellen erzeugt (Sprachrohr, Reflektor). Wie pflanzen sich dieselben nach der Reflexion an den Wänden fort? Man benutze, statt die Wellenflächen zu verfolgen, die Strahlen. Nimmt die Energie mit wachsender Entfernung ab?

8. Aus weiter Ferne stammende Wellenenergie soll an einer Stelle aufgefangen und in einem Punkte vereinigt werden. Welche Form giebt man am besten dem Auffangerohre? (Hörrohr, Brennspiegel.)

9. Im Brennpunkt eines Rotationsellipsoids wird im isotropen Medium eine Wellenbewegung erregt. Wohin gelangen die reflektierten Strahlen? (Flüstergewölbe.)

10. Wenn eine Kugelwelle in einer ebenen Grenzfläche gebrochen wird, so lassen sich die Teile der gebrochenen Wellen nahezu wieder als Teile von Kugelwellen ansehen, die vom Einfallslot wenig abweichen. Von wo kommen also die nahe dem Einfallslot liegenden Strahlen?

11. Anwendung von Üb. 10. Vor einem Glasspiegel steht in a m Entfernung ein Punkt. Von welchem Punkte hinter dem Spiegel scheint das an der Hinterfläche reflektierte Licht zu kommen, wenn man es nahe dem Einfallslote beobachtet?

12. Farben dünner Blättchen. Newtons Farbenglas. In einem optisch dichteren Medium befindet sich eine dünne ebene Schicht SS eines optisch dünneren. Auf sie treffen die Parallelstrahlen a einer sehr fernen Lichtquelle. Längs r_2 pflanzt sich fort 1) a_2 nach einer Reflexion am dünneren Medium, 2) a_1 nach einer Reflexion am dichteren Medium und zwei Brechungen. Kommen a_1 und a_2 von demselben leuchtenden Punkte (was bei gröfserer Dicke der Platte S nicht der Fall wäre), so kann man den Gangunterschied der längs r_2 sich bewegenden Wellen berechnen. Er ist $2\,d + \frac{1}{2}\lambda$, wenn d die Dicke der Platte und der Einfallswinkel

sehr klein. Wie grofs ist er bei beliebigem Einfallswinkel α? Das Entsprechende für die transmittierten Strahlen d auszuführen. Man leite hieraus die Erscheinungen ab, die dünne Blättchen, sowie das Newtonsche Glas im homogenen und im weifsen Lichte zeigen.

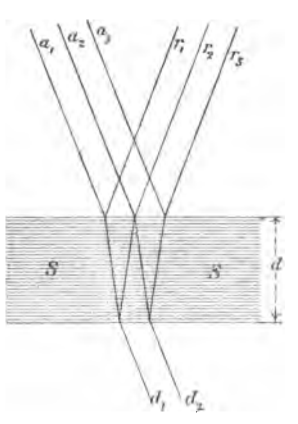


Fig. 90.

Wenn J_0 die Intensität des auf eine Grenzfläche fallenden Lichtes, kJ_0 die des reflektierten, $(1 - k) J_0$ die des durchgelassenen ist, so kann man zeigen, dafs die längs r_2 fortschreitenden Wellen nahe gleiche, die eine der längs d_2 ininterferierenden aber sehr schwache Intensität hat. Der Reflexionskoefficient k ist für Glas etwa $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{25}$.

13. Im Schwefelkohlenstoff ist bei 16° C der Brechungsexponent für die Linien

	B	D	F	H
	1,6182	1,6308	1,6555	1,7019
im Wasser	1,3317	1,3343	1,3386	1,3448.

Wie grofs sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und Wellenlängen für die genannten Stellen des Spektrums in den beiden Flüssigkeiten?

58. Das polarisierte und das natürliche Licht. — Die Polarisationserscheinungen erklärte 1815 Fresnel durch die Annahme transversaler Schwingungen, während man sich bis dahin die Fortpflanzung der Wellen im Äther nach Analogie der Luftwellen gedacht, also die Ätherschwingungen für longitudinal gehalten hatte. Man denke sich durch den Lichtstrahl ein Ebenenbüschel gelegt. Teilweise polarisiertes Licht ist nun solches, welches in verschiedenen Ebenen dieses Büschels verschiedenes Verhalten — insbesondere verschiedene Intensität — zeigt, vollkommen polarisiertes Licht solches, das nur in einer dieser Ebenen wahrnehmbar ist. Bei longitudinalen Schwingungen wäre die Existenz solchen Lichtes unerklärbar.

Da nun natürliches Licht in polarisiertes zerlegt und aus polarisiertem wieder zusammengesetzt werden kann, nimmt Fresnel auch dessen Schwingungen als transversal an. Da aber natürliches Licht in den verschiedenen Ebenen des oben eingeführten Ebenen-

büschels nicht ein verschiedenes Verhalten zeigt, so nimmt Fresnel weiter an, dafs die Schwingungen des natürlichen Lichtes in rascher Zeitfolge auf einer Ebene des Schwingungsebenenbüschels nach der anderen erfolgen oder dafs sich die Schwingungsebene des natürlichen Lichtes rasch um den Strahl als Achse dreht.

Aus der Thatsache, dafs nur von einem leuchtenden Punkte stammendes Licht Interferenzerscheinungen zeigt, mufs man schliefsen, dafs die Schwingungsebene in einer jedem leuchtenden Punkte eigentümlichen Weise rasch ihre Lage verändert, so dafs sich in jedem Momente die Strahlen zweier leuchtenden Punkte verhalten wie zwei polarisierte Strahlen verschiedener Schwingungsebene.

Wenn nun natürliches Licht auf Körper trifft, welche die Schwingungen einer Ebene des Schwingungsebenenbüschels anders beeinflussen, als die einer andern, so entsteht polarisiertes Licht. Das geschieht immer, wenn die Körpermolekeln nicht symmetrisch um den Strahl herum verteilt sind; so an der Grenze isotroper Medien, wenn das Licht schräg auffällt (Polarisation durch Reflexion und Refraktion), so in Krystallen, die nicht dem tesseralen Systeme angehören, da deren innere Kräfte in verschiedenen Richtungen verschieden grofs sind (Polarisation durch Doppelbrechung).

In Krystallen, die nicht dem tesseralen Systeme angehören, pflanzen sich die Lichtschwingungen in verschiedenen Richtungen mit verschiedener Geschwindigkeit fort, ebenfalls wieder, weil in den verschiedenen Richtungen die inneren Kräfte verschieden sind. Die Wellenfläche ist also keine Kugelfläche wie in isotropen Medien und tesseralen Krystallen, sondern von verwickelter Gestalt.

Bei den Krystallen mit einer Hauptachse, also den Krystallen des quadratischen, hexagonalen und rhombischen Systems, besteht sie aus einer Kugelfläche und einem Rotationsellipsoid, dessen Drehungsachse die Hauptachse ist. Beide Flächen berühren sich in zwei Punkten der Hauptachse. Kennt man die Wellenfläche anisotroper Medien, so kann man die in ihnen sich fortpflanzenden Wellen oder Strahlen ebensogut konstruieren, wie in isotropen Medien, was zuerst Huyghens gezeigt hat. Fällt z. B. natürliches Licht auf die Grenzebene G eines Kalkspaths, dessen Hauptachse die Richtung AA habe, so zerlege man die in A eintreffenden Schwingungen jeder Ebene des Schwingungsebenenbü-

schels in zwei Richtungen, die eine senkrecht zum „Hauptschnitt“, die andere in denselben. Hauptschnitt eines Strahles heifst die durch ihn und die Hauptachse gelegte Ebene. Nun unterliegen die im Hauptschnitt stattfindenden Schwingungen infolge

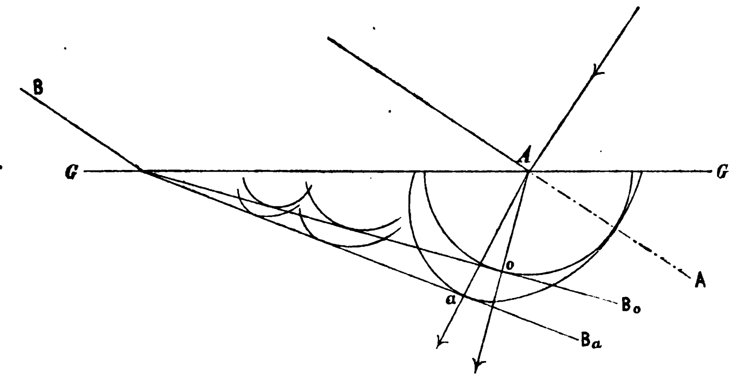


Fig. 91.

der Krystallstruktur anderen elastischen Kräften als die senkrecht zu ihnen erfolgenden. Die einen erzeugen als Partialwellen Kugelflächen, die anderen Rotationsellipsoide. Sucht man die von gleichzeitig auftretenden Partialwellen berührten Hauptwellenflächen [56], so ergiebt sich die Fortpflanzung der Wellen im Krystall. Man sieht, dafs zwei Wellen entstehen, die ordentliche, welche sich durch Kugeln, und die aufserordentliche, welche sich durch Ellipsoide bildet. Die Schwingungen beider sind senkrecht zu einander polarisiert, so dafs die eine aus Schwingungen besteht, die im Hauptschnitt erfolgen, die andere aus solchen, die senkrecht zum Hauptschnitte gerichtet sind. Die Erfahrung entscheidet nicht darüber, welche der beiden Wellen Schwingungen im Hauptschnitt zeigt, und die Theorie gelangt zu verschiedenen Resultaten, je nach den Annahmen, die sie über die Struktur des Körperäthers macht.

59. Die Aberration und das Dopplersche Phänomen. — Bewegt sich ein Beobachter B in einem ruhenden Medium, in dem sich von einer ruhenden Erregungsstelle A aus eine Wellenbewegung fortpflanzt, so scheint sie ihm aus anderer Richtung und mit anderer Schwingungszahl anzukommen, als wenn der Beob-

achter auch ruhte. Es sei c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, C die Geschwindigkeit des Beobachters, T die Schwingungsdauer, N die Schwingungszahl in der Erregungsstelle. Es möge soeben den Beobachter der Beginn einer Schwingung erreichen; dann wird ihn der Beginn der nächsten Schwingung, die jetzt noch cT Meter von ihm entfernt ist, nicht nach T Sekunden erreichen, wie es der Fall wäre, wenn er ruhte, sondern nach der Zeit T', die bestimmt wird durch die Gleichung

$$cT' \pm CT' = cT,$$

wo das obere bez. untere Zeichen gilt, wenn sich der Beobachter nähert, bez. entfernt. Es folgt

$$T' = T \frac{1}{1 \pm \frac{C}{c}}.$$

Die Entwickelung dieses Ergebnisses kann auch so erfolgen: Von A gehen in der Sekunde N Impulse aus, die am Ende der Sekunde über eine Strecke c gleichmäfsig verteilt sind. Diese Strecke würde in einer Sekunde den ruhenden Beobachter passieren. Ist aber der Beobachter unterdessen um C fortgerückt von A, so passiert ihn in der Sekunde nur die Strecke $(c - C)$, über die soviel Punkte N' verteilt sind, dafs sich verhält $N' : N = (c - C) : c$. Daraus folgt wieder das Obige.

Wie bei Annäherung und Entfernung des Beobachters an die Wellenerregungsstelle sich eine Änderung der Schwingungszahl zeigt, so tritt auch eine solche bei Bewegung der Erregungsstelle und Ruhe des Beobachters oder allgemein bei relativer Bewegung von A und B ein. Vergl. Üb. 1 ff. Diese Erscheinung heifst nach ihrem Entdecker das Dopplersche Phänomen. Sie würde veranlassen, dafs Sterne, die sich uns nähern, andere Farbe zeigen als solche, die sich von uns entfernen, wenn auch die Eigenfarbe der Sterne die gleiche wäre. Leicht zu beobachten ist die Erscheinung bei den Schallwellen. Vergl. Üb. 2 ff. —

Bewegt sich B nicht so, dafs es sich nähert oder entfernt, sondern rechtwinklig zu den Strahlen, so dafs sich die Entfernung nicht merklich verändert, so kann man zwar keine Änderung der Schwingungszahl bemerken, wohl aber der Richtung, aus der die Wellen kommen. Die Lichtquelle sei so fern, dafs die

Strahlen bei B parallel laufen. Die Lichtschwingungen, die in A_1 die Hornhaut des Auges erreichen, vereinigen sich in B_1 zu einem Netzhautbilde, gleichgültig ob das Auge ruht oder nicht, da ja das Medium der Wellenbewegung als ruhend vorausgesetzt wurde. Bewegt sich der Beobachter, so ist die Hornhaut etwa nach A_2 gelangt, während das Bild in B_1 zustande kommt. Das Auge versetzt den leuchtenden Punkt A in die Richtung B_1A_2, welche mit der wahren Fortpflanzungsrichtung einen Winkel α bildet, der bestimmt ist durch

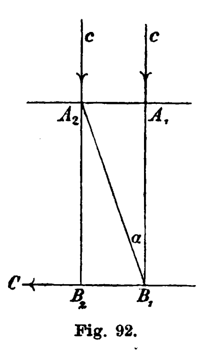


Fig. 92.

$$\tan \alpha = \frac{C}{c}.$$

Längs A_2B_1 mufs z. B. ein Fernrohr gerichtet sein, wenn es Lichtschwingungen von A_2 nach B_2 durchlassen soll.

Diese Erscheinung ist für die Lichtwellen entdeckt worden von Bradley 1727, der sie zur Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c des Lichtes der Fixsterne aus der Geschwindigkeit C der Erde in ihrer Bahn um die Sonne verwendete. Die Erscheinung heifst Aberration des Lichtes. — Für die Richtung in der uns Schallwellen treffen, sind wir zu wenig empfindlich, als dafs für diese die entsprechende Erscheinung wahrnehmbar wäre.

Die Thatsache der Aberration des Lichtes nötigt der oben gegebenen Erklärung zufolge die Undulationshypothese zu der Vorstellung, dafs der Äther, auch der Körperäther, ruht, während alle Körpermolekeln der Erde sich bewegen oder dafs letztere durch den Äther hindurchstreichen.

Übungen.

1. Die Erregungsstelle A der Wellen bewegt sich mit der Geschwindigkeit C dem Beobachter B entgegen oder von ihm fort. Welches ist die Schwingungszahl N' der beobachteten Schwingungen?

2. Mit welcher Geschwindigkeit mufs eine Lokomotive fahren, damit ein auf derselben erzeugter Ton einem ruhenden Beobachter, an dem sie vorüberfährt, im Momente des Vorüberfahrens um einen halben Ton zu fallen scheint? (Versuche von Buys-Ballot bestätigten die Theorie.)

3. Eine Stimmgabel, deren Schwingungszahl 2000 ist, wird zwischen dem Beobachter und einer Wand letzterer mit 1 m : sec genähert. Wieviel Stöfse giebt der direkt von ihr zum Ohre kommende Wellenzug mit dem an der Wand reflektierten?

4. Mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Richtung müfste die Bewegung eines leuchtenden kosmischen Körpers (Stern, Eruption auf einem Gestirn) vor sich gehen, damit sich das Spektrum nach dem brechbareren Ende um etwa $^1/_8$ verschiebt, so dafs das rote Licht ($\lambda = 760 \,.\, 10^{-6}$ mm) uns gelb erscheint ($\lambda' = 590 \,.\, 10^{-6}$ mm)?

5. Ein Stern der Ekliptik führt zufolge der Aberration im Laufe eines Jahres auf ihr eine schwingende Bewegung aus, deren Amplitude 20,″4451 beträgt. Wie grofs ist die Geschwindigkeit des Lichtes? Wo erscheint uns im Jahresverlaufe ein Stern, der in Wirklichkeit im Pole der Ekliptik steht? Welche Bahn beschreibt im allgemeinen der Ort eines Sternes zufolge der Aberration?

6. Zwei Lokomotiven fahren mit den Geschwindigkeiten $C_1\, C_2$ aneinander vorbei. Der auf der einen erzeugte Ton wird auf der andern beobachtet. Um welches Intervall sinkt der Ton beim Vorüberfahren? Z. B. $C_1 = C_2 = 25$ m : sec.

7. Wie erklärt die Emissionshypothese die Aberration? (Wie mufs eine Röhre gerichtet sein, damit ein sich gleichförmig und vertikal bewegender Regentropfen sie durchfallen kann?) Könnte die Emissionshypothese das Dopplersche Phänomen erklären, 1) wenn der Beobachter ruht, 2) wenn die Quelle ruht?

Mechanik des vollkommen flüssigen Körpers.

XIV. Die Erscheinungen des Druckes.

60. Der Druck. — Die Bewegungserscheinungen fester Körper werden, wie wir im 2. Abschnitt gesehen haben, mit einer für aufserordentlich viele und wichtige Fälle hinreichenden Genauigkeit beschrieben, wenn man den festen Körper als starren Körper behandelt. Der Begriff des starren Körpers ist eine Abstraktion, zu der man gelangt, indem man gewisse Nebenerscheinungen fester Körper, wie sie in Abschnitt 3 behandelt wurden, zunächst unbeachtet läfst. In gleicher Weise ist es gelungen, durch Nichtbeachtung gewisser Nebenerscheinungen, welche flüssige und luftförmige Körper zeigen, den Begriff des vollkommen flüssigen Körpers so zu bilden, dafs die Erscheinungen, welche derselbe der Theorie gemäfs zeigen müfste, mit den Erscheinungen, welche erfahrungsmäfsig eine Flüssigkeit oder ein luftförmiger Körper zeigt, in den meisten Fällen hinreichend übereinstimmen. Die aufser Acht gelassenen Nebenerscheinungen zeigen sich besonders auffällig bei zähen Flüssigkeiten und werden der inneren Reibung und der Reibung an den Gefäfswänden zugeschrieben.

Die inneren Kräfte, Kohäsionskräfte, sind bei festen Körpern so grofs, dafs man in vielen Fällen (Abschnitt 2) mit der Annahme auskommt, sie verhinderten überhaupt jede gegenseitige Bewegung der Molekeln. Anders bei flüssigen und luftförmigen Körpern. Man denke sich ein dünnes beiderseits offenes cylindrisches Röhrchen, dessen Endfläche 1 qmm grofs ist, in eine Flüssigkeit oder ein Gas getaucht. Die Erfahrung lehrt, dafs die Flüssigkeit, wie das Gas, durch die Öffnung in das Röhrchen eindringt. Man mufs also schliefsen, dafs an der Öffnung eine Kraft ausgeübt wird, welche die Ursache davon ist, dafs sich die Flüssigkeit durch die Öffnung hindurchbewegt. Ist die Öffnung verschlossen, so wirkt diese Kraft auf den Verschlufs und könnte

z. B. ein dünnes Häutchen, das denselben bildet, zersprengen. Ein Körper heifst nun vollkommen flüssig, wenn er auf jede beliebig kleine Fläche in ihm eine Kraft ausübt, welche normal zur Fläche gerichtet und der Gröfse nach der Fläche proportional, aber unabhängig von der Stellung der Fläche (der Richtung ihrer Normalen) ist. Die auf die Flächeneinheit ausgeübte Kraft heifst der Druck der Flüssigkeit an der betreffenden Stelle. Dieser Druck kann sich in der Flüssigkeit von Ort zu Ort ändern, so dafs 1 qmm, dessen Mittelpunkt A ist, stärker gedrückt werden kann, als wenn ein anderer Punkt B sein Mittelpunkt ist; eine Drehung des qmm um A ändert aber die Gröfse des Drucks nicht, sondern nur dessen Richtung. Dabei ist angenommen, dafs sich der Druck von mm zu mm unmerklich ändert, andernfalls hätte man die betrachtete Fläche kleiner als 1 qmm wählen müssen, — eben so klein, dafs gleiche Teile derselben nicht merklich verschiedenen Druck erleiden.

Man grenze sich in Gedanken einen Würfel von der Gröfse eines cmm in einer ruhenden vollkommenen Flüssigkeit ab, dessen Kanten horizontal und vertikal liegen. Nach dem eben Gesagten wirken auf die 6 qmm, welche die Oberfläche dieses Flüssigkeitsstückes bilden, Druckkräfte, welche, so lange die Flüssigkeit ruht, mit der Schwerkraft des cmm im Gleichgewichte stehen müssen. Das ist nur möglich, wenn die auf die vertikalen Flächen ausgeübten Druckkräfte sich aufheben, die von unten ausgeübte aber um das Gewicht eines cmm gröfser ist, als die von oben wirkende. Hieraus folgt, dafs, wenn allein die Schwerkraft auf eine Flüssigkeit wirkt und sich die Flüssigkeit in Ruhe befindet, der Druck in allen Punkten einer horizontalen Fläche konstant ist, in vertikaler Richtung aber mit der Tiefe wächst, und zwar wächst der Druck pro qmm mit jedem mm um das Gewicht eines cmm, oder der Druck pro qcm mit jedem cm um das Gewicht eines ccm. Der Ort aller Punkte, die gleichen Druck erleiden, heifst eine Niveaufläche; bei blosser Einwirkung der Schwere auf ruhende Flüssigkeiten sind die Niveauflächen horizontal, also Kugelflächen, deren Mittelpunkt der Erdmittelpunkt ist, und deren Teile bei geringer Erstreckung von ebenen Flächenstücken nicht unterschieden werden können. Die höchste Niveaufläche heifst Oberfläche der Flüssigkeit; in ihr

ist der Druck Null, wenn nicht eine andere Flüssigkeit über ihr steht.

Nun hängt die weitere Bestimmung des Druckes, der an einer gegebenen Stelle der Flüssigkeit herrscht, von der Kenntnis des Gewichts eines Kubikcentimeters der Flüssigkeit ab. Dieses zeigt aber erfahrungsmäfsig bei tropfbaren Flüssigkeiten ein ganz anderes Verhalten als bei luftförmigen, so dafs auch die Theorie genötigt ist, zwei Arten vollkommener Flüssigkeiten zu unterscheiden, die vollkommen unzusammendrückbaren und die vollkommen elastischen Flüssigkeiten. Bei jenen ist das Gewicht eines ccm unabhängig vom Druck, bei diesen dem Drucke proportional. Die Begriffe dieser beiden Arten vollkommener Flüssigkeiten sind wiederum Abstraktionen, aus denen Gesetze folgen, die mit den Erfahrungen in hinreichender Übereinstimmung stehen: die Erscheinungen, die der Theorie gemäfs eine vollkommen zusammendrückbare Flüssigkeit zeigen mufs, finden sich in der Natur in grofser Annäherung bei tropfbaren Flüssigkeiten; die Erscheinungen, die eine vollkommen elastische Flüssigkeit zeigen soll, stimmen gut mit den an luftförmigen Körpern oberhalb des kritischen Punktes (an Gasen) beobachteten Erscheinungen überein.

Auf das Gewicht eines ccm hat aufser dem Drucke noch die Temperatur Einflufs. Die Theorie der vollkommenen Flüssigkeiten nimmt zunächst an, dafs die Temperatur sich nicht verändere. Sie gerät dadurch meist in erheblichen Widerspruch mit der Erfahrung, sobald sie die Bewegung luftförmiger Körper in ihren Bereich ziehen will; bei diesen müssen die durch die Bewegung veranlafsten Wärmeerscheinungen in Rücksicht gezogen werden.

Übungen.

1. Auf die Fläche F wirkt die Kraft K. Wie grofs ist der Druck? Man entwickele dabei, dafs die Dimension des Druckes ist Kraftmafs: Längenmafs im Quadrat.

1ª. Zu beweisen: Die auf ein horizontales Flächenstück ausgeübte Druckkraft greift im Schwerpunkt der Fläche an.

1ᵇ. In welcher Beziehung steht die Druckdifferenz in tropfbaren Flüssigkeiten mit der Potentialdifferenz der Schwere?

2. Zu beweisen: Die Kraft, mit der eine Fläche f gedrückt wird, hat zur Komponente in gegebener Richtung die Kraft mit

der die Projektion von f auf die zu dieser Richtung normale Ebene an derselben Stelle der Flüssigkeit gedrückt würde.

3. Zu beweisen, dafs in kommunizierenden Gefäfsen eine Flüssigkeit gleich hoch steht, und die Höhen verschiedener Flüssigkeiten über der Trennungsfläche den specifischen Gewichten umgekehrt proportional sind.

4. Wie grofs ist der Druck im Wasser auf einen Fisch von 1 dm² Oberfläche in 1, 10, 100, 1000, 8000 m Tiefe, vorausgesetzt, dafs ein ccm Wasser auch in den gröfsten Tiefen noch 1 g wiegt?

5. Unter dem Druck einer Atmosphäre wird Wasser um das 0,000 0499 fache seines Volums zusammengedrückt. Bis zu welchem Drucke darf also Wasser als vollkommen unzusammendrückbare Flüssigkeit angesehen werden, wenn man Abweichungen um $\frac{1}{1000}$ des Gewichts als unerheblich ansieht?

6. Wie grofs ist der Druck der Atmosphäre im Meeresniveau in kg : cm², da derselbe im Mittel eine Quecksilbersäule von 760 mm Höhe trägt. Barometer. (Viviani, Torricelli, Pascal.)

7. Eine zweischenklige Röhre, durchgehends vom Querschnitt $q = 1$ cm², enthält im linken geschlossenen Schenkel $v = 10$ ccm atmosphärische Luft vom Zustande der äufseren Luft abgesperrt, so dafs in beiden Schenkeln das Niveau des abschliefsenden Quecksilbers gleich hoch steht. Wieviel Quecksilber mufs man in den offenen rechten Schenkel giefsen oder unten an der Umbiegung der Röhre auslaufen lassen, damit im geschlossenen Schenkel das Niveau um α) $h = 5$ cm steigt oder um β) $h' = -5$ cm (d. i. um 5 cm fällt)? Wie grofs ist dann der Niveauunterschied in beiden Schenkeln? Barometerstand $b = 760$ mm. (Nachweis des Gesetzes von Boyle oder Mariotte.)

8. In kommunizierenden Cylindern von den Querschnitten q und Q sind zwei Kolben beweglich, die eine Wassermasse dicht abschliefsen. In welcher Beziehung stehen die Kräfte k und K, die auf sie wirken müssen, um Gleichgewicht zu halten? Der eine Kolben bewegt sich gleichförmig vorwärts im Sinne der Kraft k um s; um welche Strecke S mufs sich der andere rückwärts bewegen, so lange die Flüssigkeit als unzusammendrückbar gelten kann? Die von der Kraft geleistete Arbeit ist dann gleich der von der Last verbrauchten, es ist nichts an Arbeit gewonnen worden. Hydraulische Presse. (Bramah.)

9. Was ändert sich an Üb. 8, wenn Luft statt des Wassers genommen wird? Die beim Zusammendrücken der Luft scheinbar verlorene Arbeit ist teils als potentielle Energie teils als Wärme im Gase vorhanden. Vergl. Mayers Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents [21 Üb. 4].

10. Eine horizontale Fläche F befindet sich h cm unter dem Spiegel einer tropfbaren Flüssigkeit vom specifischen Gewichte σ. Welche Kraft wirkt auf sie? (Richtung, Gröſse, Angriffspunkt zu ermitteln.) Bodendruck.

11. Der Boden eines Wassergefäſses wird durch ein Stück einer Kugelfläche gebildet. Das Gefäſs stellt eine Rotationsfigur mit vertikaler Achse dar. Man bestimme Richtung und Angriffspunkt des Bodendrucks unter der Annahme, daſs alle Teile des Bodens gleichgroſsen Druck erleiden.

12. In der vertikalen Seitenwand eines Gefäſses befindet sich eine rechteckige Klappe mit vertikalen und horizontalen Kanten. Die oberste Kante liegt h cm unter Wasser, die unterste $(h + a)$ cm, die Breite der Klappe ist b cm. Um die Kraft zu ermitteln, die auf die Klappe wirkt, denke man zunächst dieselbe in horizontale Streifen zerlegt von je 1 cm Höhe. Die Kraft, die auf einen solchen Streifen wirkt, kann man graphisch darstellen, ihre Gröſse liegt zwischen zwei Grenzen, die beliebig dichter gerückt werden können, indem man die Streifen schmäler wählt. Auflösung: Die Kraft ist horizontal gerichtet, hat die Gröſse $(h + \frac{1}{2} a) ab\sigma$, ihr Angriffspunkt liegt um $\frac{1}{2} b$ von jeder vertikalen Kante entfernt in der Tiefe $h + [\frac{1}{3} a (3h + 2a) : (2h + a)]$. Seitendruck.

13. Hydrostatisches Paradoxon. Auf einer Wagschale steht ein Glas mit Wasser, dessen Wände sich nach oben verengen (erweitern). Der Bodendruck ist gröſser (kleiner) als das Gewicht des Wassers. Da er sich auf die Wagschale überträgt, so zeigt wohl die Wage eine gröſsere (kleinere) Belastung an, als das Gewicht des Wassers (und des Gefäſses) beträgt? Ein Kilogramm Wasser wiegt also in diesem Falle wohl mehr (weniger) als 1 kg?

14. Stechheber. Eine cylindrische Röhre von $q = 2\,\text{cm}^2$ lichtem Querschnitt und enger unterer Öffnung ist von oben ab der Länge nach in cm geteilt. Man läſst Wasser auslaufen bis der Spiegel den $h = 6$-ten Teilstrich erreicht hat. Dann verschlieſst man die obere Öffnung. Wieviel Wasser läuft noch aus, wenn die ganze Länge der Röhre $H = 50$ cm beträgt? Dasselbe für Quecksilber statt Wasser.
(Die alte Erklärung mittels horror vacui ist unrichtig. Nachweis.)

15. Das Verbindungsrohr zweier kommunizierenden Gefäſse von gleichem Querschnitt q ist durch einen Hahn abgesperrt. Eine tropfbare Flüssigkeit vom specifischen Gewichte σ steht links $(H - a)$, rechts $(H + a)$ cm hoch. Man öffnet den Hahn. Welche Bewegung der Flüssigkeitsspiegel tritt ein? Anleitung: Sind in einem Momente der Bewegung $H - x$ und $H + x$ die Höhen, so bewegt sich die ganze Flüssigkeit, deren Gewicht G sei, unter dem Einfluſs des fallenden Gewichts $2x \cdot q \cdot \sigma$ Gramm. So folgt die Beschleunigung proportional mit x.

16. Reaktion. Ein cylindrisches Gefäſs ist mit Wasser gefüllt und an Fäden als Pendel aufgehängt. Man öffnet einen Ausfluſs, der $h = 40$ cm unter Wasser in der Seitenwand angebracht ist. Die Öffnung hat $q = 1$ qcm Fläche. Wie groſs ist die Resultante aller auf den Cylinder ausgeübten Flüssigkeitsdrucke? Nach welcher Seite bewegt sich das Gefäſs? Wie hoch hebt sich der Schwerpunkt des gefüllten Gefäſses, wenn er $l = 1$ m vom Aufhängepunkte absteht, während die Ausfluſsöffnung $l = 1$ m 20 cm von letzterem entfernt ist? (Man führe den Ausschlagswinkel α ein.)

17. Reaktionsrad nach Segner. Es möge vier Arme tragen, die in 30 cm Abstand von der Achse Seitenöffnungen von 0,5 qcm besitzen. Welches Drehmoment wirkt auf die Arme, wenn die Öffnungen 1 m unter Wasser liegen? Wovon hängt die Rotationsgeschwindigkeit der Arme noch ab?

61. Der Auftrieb. — Sowie der Druck der Flüssigkeit auf die Gefäſswände ausgeübt wird (Boden- und Seitendruck) oder auf die Oberfläche anderer Flüssigkeiten (Kommunizierende Röhren mit mehreren Flüssigkeiten, Barometer), — so wirkt er auch auf die Oberfläche von Körpern, die in die Flüssigkeit eingetaucht sind.

Die Drucke, welche auf die Oberfläche eines in eine Flüssigkeit tauchenden, ruhenden Körpers ausgeübt werden, sind identisch mit den Drucken, welche auf dieselbe Fläche ausgeübt würden, wenn sie nicht vom eintauchenden Körper, sondern von einem Teil der Flüssigkeit, welche wir die vom Körper verdrängte Flüssigkeit nennen, erfüllt wäre. Daher müssen diese Drucke der Schwere der verdrängten Flüssigkeit Gleichgewicht halten, ihre Resultante also durch den Schwerpunkt dieser gehen, aufwärts gerichtet und so groſs wie das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit sein. Diese Resultante der Druckkräfte heiſst der Auftrieb des eintauchenden Körpers. Der Auftrieb wird durch eine Strecke dargestellt, die nach Gröſse und Angriffspunkt dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit gleicht, aber entgegengesetzt gerichtet ist (Archimedes). Bei tropfbaren Flüssigkeiten können wir die Resultante der Drucke unmittelbar durch Kräftezusammensetzung bilden und so auch auf diese Weise die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes darthun.

Befindet sich in einer vollkommenen unzusammendrückbaren Flüssigkeit ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen vertikale

Kanten c, dessen horizontale a und b cm betragen, und liegt die obere Endfläche h cm unter dem Flüssigkeitsspiegel, so erleidet diese obere Endfläche $ab \cdot h\sigma$ g, während auf die untere $ab(h + c)\sigma$ g in entgegengesetzter Richtung wirkt. Dabei bezeichnet σ das specifische Gewicht der Flüssigkeit. Die genannten Druckkräfte wirken in derselben Geraden, haben daher eine aufwärts gerichtete Kraft $abc\sigma$ zur Resultante. Da alle auf die Seitenflächen des Parallelepipeds ausgeübten Kräfte sich aufheben, so ist jene Resultante der vertikalen Drucke überhaupt die Resultante aller auf den Körper von der Flüssigkeit ausgeübten Kräfte, der **Auftrieb** des Körpers in der Flüssigkeit. Dieser Auftrieb ist nach Gröſse und Angriffspunkt im betrachteten Falle offenbar identisch mit dem Gewichte $abc \cdot \sigma$ der durch den eintauchenden Körper verdrängten Flüssigkeit und hat entgegengesetzte Richtung wie dieses Gewicht.

Um dasselbe für einen **beliebigen Körper** zu beweisen, zerlege man jede auf einen seiner Oberflächenteile wirkende Druckkraft in eine vertikale und zwei zu einander senkrechte horizontale Komponenten, die etwa nach rechts und nach vorn gerichtet sind. Um nun zunächst zu zeigen, daſs sich sämtliche Druckkomponenten der einen Horizontalrichtung zerstören, denke man den Körper in beliebig dünne Stäbchen mit Längskanten von derselben Richtung zerlegt. Die auf die beiden Endflächen eines solches ausgeübten Horizontalkomponenten heben sich auf nach [60 Üb. 2]. Dasselbe gilt für die Druckkomponenten der anderen Horizontalrichtung. Die Vertikalkomponenten aber geben eine Resultante. Um dieselbe zu ermitteln, zerlege man drittens den Körper in dünne prismatische Stäbchen von vertikalen Längskanten. Liegen die Punkte der oberen Endfläche eines dieser Stäbchen zwischen h_1 und h_2 cm unter dem Flüssigkeitsspiegel, die der unteren zwischen H_1 und H_2 cm, so ist das Stäbchen zwischen zwei Prismen mit parallelen Endflächen eingeschlossen, deren eines die Kantenlänge $H_2 - h_1 = l_1$ hat, während die Kanten des andern $H_1 - h_2 = l_2$

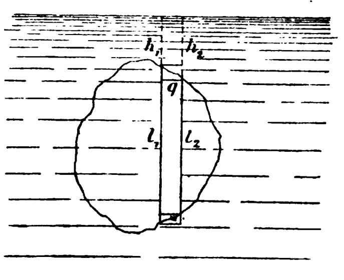


Fig. 93.

cm lang sind. Stellt nun q die Gröfse des horizontalen Querschnitts des Stäbchens, σ das specifische Gewicht der Flüssigkeit dar, das überall in der Umgebung des Körpers dasselbe sein möge, so ergeben die vertikalen Komponenten der beiden auf die Endflächen des Stäbchens wirkenden Kräfte eine Resultante, die zwischen $q\sigma l_1$ und $q\sigma l_2$ Gramm liegt. Je kleiner man den Querschnitt des Stäbchens gewählt hat, um so genauer stimmt diese Resultante nach Gröfse und Angriffspunkt mit dem Gewichte der durch das Stäbchen verdrängten Flüssigkeit überein, während ihre Richtung die entgegengesetzte des Gewichtes ist. Hieraus folgt mittels Zusammensetzung paralleler Kräfte wieder der Archimedische Satz vom Auftrieb.

Dieser Satz vom Auftrieb gilt, wie sich aus seiner Herleitung ergiebt, wenn der Körper nicht vollständig eintaucht, sondern schwimmt, für den eintauchenden Teil des Körpers, welcher verdrängtes Volumen (Deplacement) heifst.

Nun wirkt auf einen vollständig eintauchenden Körper aufser dem Auftrieb A noch seine Schwere G. Ist der Körper homogen und taucht vollständig ein, so haben beide gleichen Angriffspunkt. Ob ein eintauchender Körper im Gleichgewicht ist und von welcher Art das Gleichgewicht ist, hat man nach [29] zu beurteilen.

Ist $A > G$, so findet der Körper eine Gleichgewichtslage, wenn er soweit aus der Flüssigkeit emporsteigt, dafs er nur noch den kleineren Auftrieb $A' = G$ erleidet. Bei der Bestimmung der Art des Gleichgewichts solcher schwimmenden Körper ist zu bedenken, dafs bei jeder Lagenänderung des Körpers sich das verdrängte Volumen nicht der Gröfse nach, aber der Gestalt nach ändert.

Übungen.

1. Homogene Körper sinken, schweben in der Flüssigkeit oder schwimmen, je nachdem ihr specifisches Gewicht im Vergleich mit dem der Flüssigkeit gröfser, gleich oder kleiner ist. Beweis.

2. Wenn sind Körper, deren Gewicht ihrem Auftrieb gleicht, in stabilem, labilem, indifferentem Gleichgewicht?

3. Die vertikale Wand eines Gefäfses hat einen rechteckigen Ausschnitt, durch den ein Cylinder zur Hälfte in das Innere des Gefäfses reicht, der um eine horizontale Achse drehbar ist und dessen Oberfläche wasserdicht an den Rändern des Rechtecks vorübergleiten kann. Wird das Gefäfs mit Wasser gefüllt, so wirkt

auf den inneren Halbcylinder der Auftrieb. Bewirkt dieser nicht Rotation des Cylinders, so dafs letzterer ein Perpetuum mobile ist?

4. Wenn ein Körper in eine Flüssigkeit einsinkt (und untersinkt), erhält er nicht die kinetische Energie, die er bei freiem Falle gewonnen haben würde. Wozu ist die Arbeit der Schwere verwendet worden?

5. Auf einer Wagschale steht ein Wasserglas, das durch Gewichte auf der andern Schale im Gleichgewichte gehalten wird. Man taucht einen Finger ins Wasser. Wie schlägt die Wage aus?

6. Ein Körper vom Volum $v = 43{,}4$ ccm wurde in der Luft bei $t = 20^0$ und $b = 740$ mm Barometerstand gewogen. Sein Gewicht ergab sich zu $G = 320{,}045$ g. Wie schwer würde er sich im luftleeren Raume zeigen?

7. In welchem Gleichgewichte befindet sich eine homogene schwimmende Kugel?

8. Skalenaräometer. Eine cylindrische Röhre vom Querschnitt q qcm taucht x cm in eine Flüssigkeit vom specifischen Gewichte σ. Die Röhre ist am untern Ende so schwer, dafs sie in vertikaler Lage stabil schwimmt. Ihr Gewicht ist G. Wie hängt x von σ ab? Mittels einer gleichseitigen Hyperbel kann man die Röhre so einteilen, dafs ihre Eintauchtiefe das specifische Gewicht der Flüssigkeit angiebt.

9. Eine cylindrische Röhre schwimmt aufrecht im Wasser. Sie taucht a cm ein, hat das Gewicht G, den Querschnitt q. Man drückt sie noch h cm unter Wasser und läfst sie dann los. Welche Bewegung entsteht, von der Reibung abgesehen? Anleitung: Da $qa = G$, so wirkt auf die Röhre, wenn sie $(a + x)$ cm unter Wasser reicht, aufwärts die Kraft qx Gramm. [34.]

10. Versuch nach Weinhold. In ein mit Wasser bis zum Rand gefülltes Probierglas setzt man ein etwas engeres, so dafs es schwimmt. (Die letzten Tropfen des überlaufenden Wassers tupft man mit der Fingerspitze weg). Dann kehrt man das weitere Glas rasch zwischen den Fingern um, so dafs der Boden sich oben befindet. Es bleibt dennoch Gleichgewicht, wenn vorher genau die Schwimmtiefe hergestellt war. Man erkläre diese Erscheinung, wobei man den Luftdruck zu berücksichtigen hat. Was geschieht, wenn das Probierglas nicht genau schwimmt, sondern zu tief oder nicht hinreichend tief eintauchte, was übrigens infolge der Reibung und Adhäsion unbeabsichtigt vorkommen kann.

62. Der Druck der Luft in verschiedenen Höhen. — Es möge auf der Meeresoberfläche der Luftdruck p_0 lasten, der im Normalzustande 10 333 kg : m² ist, in 1 m Höhe der Druck p_1, in h m Höhe p_h. Dann mufs $p_0 - p_1$ dem Gewichte

1000 : 773 kg : m^3 = σ_1 gleichen, das ein Kubikmeter Luft der tiefsten Meterschicht des Luftmeeres hat, $p_1 - p_2 = \sigma_2$ dem Gewichte eines Kubikmeters der zweiten Meterschicht u. s. f. Die Gewichte dieser Kubikmeter verschiedener Schichten sind verschieden, nämlich dem Drucke proportional, unter dem sie stehen, da die Luft als vollkommen elastische Flüssigkeit betrachtet werden darf und wir annehmen, dafs keine Temperaturverschiedenheiten in der untersuchten Luftmasse vorkommen. Die Teile der untersten Meterschicht stehen nun unter Drucken, die zwischen p_0 und p_1 liegen, daher

$$kp_0 > p_0 - p_1 > kp_1$$

und analog

$$kp_1 > p_1 - p_2 > kp_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

oder

$$\frac{1}{1+k} p_0 > p_1 > (1-k) p_0$$

$$\frac{1}{1+k} p_1 > p_2 > (1-k) p_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Der Proportionalitätsfaktor k ist 1000 : 773 . 10333 für die Temperatur 0^0. Man kann daher, höhere Potenzen von k vernachlässigend, den Unterschied zwischen $(1 - k)$ und $1 : (1 + k)$ als unerheblich betrachten und hat

$$p_1 = (1-k) p_0$$

$$p_2 = (1-k) p_1 = (1-k)^2 p_0$$

$$p_3 = (1-k) p_2 = (1-k)^3 p_0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

1. $$p_h = (1-k)^h p_0$$

woraus durch Erweiterung mit k noch folgt

2. $$\sigma_{h+1} = (1-k)^h \sigma_1 .$$

Der Druck und das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft nimmt nach einer geometrischen Reihe ab, wenn die Höhe nach einer arithmetischen zunimmt.

Übungen.

1. Wie grofs ist Druck und Dichtigkeit der Luft in 100 m, 1000 m, 1 Meile, 10 Meilen Höhe?

2. Wie grofs ist der Koefficient k für 0^0, 20^0, -20^0 C? Ist er abhängig vom Druck am Meeresspiegel?

3. Um wieviel Meter mufs man vom Meeresspiegel emporsteigen, damit das Barometer um 1 mm fällt? Um wieviel Meter mufs man zu demselben Zwecke steigen, wenn man schon von 7000 m Seehöhe ausgeht?

4. Wieviel beträgt die Reduktion des Barometers auf den Meereshorizont im Schulzimmer bez. einem andern Orte von genau (auf 1 m genau) bekannter Seehöhe (Höhenmarke des Bahnhofs u. dergl.), d. h. wieviel mm mufs man dem beobachteten Barometerstande hinzufügen, um den Stand zu erhalten, der sich bei gleicher Luftbeschaffenheit im Meeresniveau zeigen würde?

5. Barometrisches Höhenmessen. Am Fufse und auf dem Gipfel eines Berges beobachtet man die Barometerstände b_u und b_o. Wie findet man die Berghöhe? An welche Bedingungen ist die Anwendung der Formel geknüpft? Aufl. Bei der Ausrechnung von $\log(1 - k)$ benutze man die logarithmische Reihe. Für die Temperatur 0^0 findet man in Metern

$$h = 18392 \log (b_u : b_o).$$

6. Ein kleiner Luftballon (Collodiumballon) wiegt 2 g und bildet eine Kugel von 2 dm Radius. Wie grofs ist sein Auftrieb am Meeresspiegel beim Normalzustand? Wie hoch steigt er in der Luft, ehe er im Gleichgewichte steht?

7. Man will mittels Leuchtgas in 10 000 m Seehöhe mit 300 kg Last (Ballon, Gondel, Insassen u. s. f., Gasgewicht ausgeschlossen) steigen. Welches Volumen mufs der Ballon erhalten? Wieviel Ballast braucht man zuerst, um den Ballon in der untersten Luftschicht im Gleichgewicht zu erhalten? Man betrachte die Dichtigkeit der den Ballon jeweilig umgebenden Luft als gleich, oben so grofs, wie unten und nehme an, dafs man beim Aufsteigen soviel Gas entweichen läfst, als nötig ist, um den inneren Druck dem äufseren gleich zu erhalten. Die Dichte des Gases nehme man zu 0,5 an, bez. auf Luft. Das Volum der Last (wenige cbm) braucht man nicht zu berücksichtigen.

8. Die Luft einer Montgolfière wird 100^0 warm erhalten. Wie hoch kann der Ballon steigen in Luft von 10^0, wenn er 1 cbm grofs ist und 75 g Last zu tragen hat?

XV. Die Erscheinungen der Strömung.

63. Die Strömung. Flüssigkeiten können sich erstens wie starre Körper bewegen, zweitens so, dafs ihre Teile gegenseitige Verschiebungen erfahren. In der letzteren Gruppe von Bewegungen unterscheidet man Wellenbewegungen, Strömungen und Wirbelbewegungen. Die Wellen in Wasser und Luft sind

im dritten Abschnitt behandelt worden. Wirbel treten sehr oft bei Flüssigkeitsbewegungen auf; man kann sie gut ausgebildet in tropfbaren Flüssigkeiten hervorbringen, indem man mit der Spitze eines Löffels, die hohle Seite voran, durch die Flüssigkeit fährt, — in der Luft, indem man Rauch aus der Öffnung eines Kastens mit biegsamen Wänden heraustreibt.

Hier sollen rein strömende Bewegungen mathematisch untersucht werden und auch von diesen nur die **stationären Strömungen**, d. h. solche Bewegungen, bei denen durch dieselbe Stelle des mit Flüssigkeit erfüllten Raumes zwar im Laufe der Zeit immer andere Flüssigkeitsteile gehen, diese aber sämtlich in gleicher Richtung und Geschwindigkeit. Durch eine enge Röhre ströme eine vollkommene unzusammendrückbare Flüssigkeit so, dafs jeder ebene Querschnitt F von den Flüssigkeitsteilen in Richtung seiner Normalen, also in der Längsrichtung der Röhre passiert werde und von allen Teilen mit gleicher Geschwindigkeit v. Die Röhre soll zwar gekrümmt und von veränderlicher Weite sein, aber immer so eng, dafs trotzdem die Richtungen aller einen Querschnitt passierenden Teile als parallel angesehen werden dürfen.

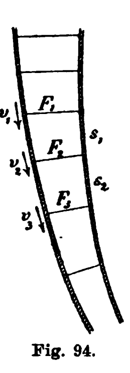


Fig. 94.

Wir markieren nun einzelne Querschnitte $F_1 F_2 F_3 \ldots$, in Abständen $s_1 s_2 s_3 \ldots$, die so gelegt sind, dafs zwischen je zwei einander folgenden dasselbe Flüssigkeitsgewicht G Gramm, sich befindet und einander so nahe liegen, dafs man dies zwischen je zwei aufeinander folgenden eingeschlossene Volumen als Cylinder berechnen kann. Wird nun F nach qcm, s nach cm gemessen und bezeichnet σ das Gewicht eines ccm, so ist

$$1. \qquad F_1 s_1 = F_2 s_2 = F_3 s_3 = \ldots\ldots = \frac{G}{\sigma}.$$

Die Unzusammendrückbarkeit fordert, dafs die in der Zeiteinheit den Querschnitt passierende Flüssigkeitsmasse, die **Stromstärke** J, für alle Querschnitte die gleiche sei

$$2. \qquad F_1 v_1 = F_2 v_2 = F_3 v_3 = \ldots\ldots = \frac{J}{\sigma} g.$$

Während das Flüssigkeitsgewicht G vom ersten zum zweiten Querschnitt fliefst, ändert sich seine kinetische Energie um $\frac{1}{2}(G:g)(v_2^2 - v_1^2)$.

Die dabei von den inneren Kräften, den Druckkräften, geleistete Arbeit ist $(p_1 - p_2) F_1 s_1 = (p_1 - p_2)(G : \sigma)$. Vom anfänglichen Querschnitt F_0 bis zu dem beliebigen Querschnitte F wächst die kinetische Energie um $\frac{1}{2}(G : g)(v^2 - v_0^2)$ und die potentielle Energie nimmt ab um $(p_0 - p)(G : \sigma)$. Ferner leistet die Schwere die Arbeit Gh, wo h die Höhendifferenz zwischen F_0 und F. Die Arbeit der von den Wänden der Röhre ausgeübten Reaktionen ist Null, weil diese Reaktionen senkrecht zu den Bahnen der Flüssigkeitsteile stehen. Sonach ergiebt das Energiegesetz die Gleichung

$$\frac{1}{2} \frac{G}{g} (v^2 - v_0^2) = Gh + (p_0 - p) \frac{G}{\sigma}$$

oder

$$3. \qquad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = gh + (p_0 - p) \frac{g}{\sigma}$$

und mittels Gl. 2 folgt

$$4. \qquad \frac{1}{2} v^2 \left(1 - \frac{F^2}{F_0^2}\right) = gh + (p_0 - p) \frac{g}{\sigma}.$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für die der Ableitung zu Grunde gelegte Strömung durch eine enge Röhre, sondern auch wenn man die bewegte vollkommen unzusammendrückbare Flüssigkeit in röhrenförmige Partien zerlegen kann, in deren jeder eine den obigen Bedingungen entsprechende Strömung erfolgt. Das ist der Fall, wenn die Niveauflächen von den sie passierenden Flüssigkeitsteilen normal durchschnitten werden und nirgends Unstetigkeiten vorkommen. Eine solche Bewegung heifst Strömung, die Strömung durch eine enge Röhre ist ein besonderer Fall davon.

Auf vollkommen elastische Flüssigkeiten ist die Entwickelung anwendbar, wenn die Dichte der bewegten Teile nicht merklich verschieden ist (sonst gilt Gl. 1 und 2 nicht) und wenn keine Wärmeentwickelung stattfindet (sonst gilt das Energiegesetz nicht in der oben angewendeten Form).

Übungen.

1. Ausflufs des Wassers aus einem Gefäfs bei kleiner Ausflufsöffnung, also nahe konstanter Druckhöhe h. Der Druck an der Oberfläche und an der Öffnung ist der Atmosphärendruck. Man leite das Gesetz von Torricelli ab $v = \sqrt{2gh}$. An welche

Bedingungen ist es geknüpft? Da diese in Wirklichkeit nicht erfüllt sind, so trägt die praktische Hydraulik den besonderen Eigentümlichkeiten der Öffnung, der Gefäfswände u. s. f. durch Koefficienten Rechnung, die durch Beobachtung ermittelt werden und setzt die wirkliche Ausflufsgeschwindigkeit $v' = \zeta\sqrt{2gh}$.

2. Auf horizontaler Unterlage steht ein Wassergefäfs, das bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt ist. In welcher Höhe x mufs eine kleine Öffnung angebracht werden, damit der Strahl möglichst weit springt, in möglichst grofsem Abstande vom Gefäfse die Unterlage erreicht?

3. Ein Schenkelheber erhebt sich 30 cm über das Niveau des Wassers, während der lange Schenkel 80 cm beträgt, so dafs die freie Öffnung 50 cm unter dem Niveau liegt. Wieviel Wasser läuft in der Sekunde aus der kreisförmigen Öffnung von 3 mm Weite?

4. Eine Röhre (oder ein offener Kanal) von überall gleichem Querschnitt F wird von Wasser durchflossen. An ihrem oberen Ende herrscht der Druck p_0, wie grofs ist der Druck in h cm Tiefe unter diesem?

Auflösung. $p = p_0 + h\sigma$, er wächst mit der Tiefe, wie durch Piëzometer gezeigt werden kann, welche auch die wegen der Widerstände eintretenden Druckverluste zu messen gestatten.

5. Man entwickele aus Gl. 3, den Einflufs der Schwere vernachlässigend, die Gleichung

$$p = p_0 + \tfrac{1}{2} v_0^2 \frac{\sigma}{g}\left(1 - \frac{F_0^2}{F^2}\right).$$

Sie zeigt, dafs in Röhren der Druck p sich mit dem Querschnitte F ändert. Wie wirkt Erweiterung, wie Verengung des Rohres? Unter welcher Bedingung wird der Druck negativ? Saugwirkung der strömenden Flüssigkeiten: Phänomen von Clément und Desormes, Inhalationsapparat, Giffard's Injektor, Dampfblaserohr der Lokomotiven, — auch die Saugluftpumpen.

6. Ausflufs der Gase aus grofsen Gefäfsen durch enge Öffnungen bei Zulässigkeit der im Texte angegebenen Bedingungen für die Anwendbarkeit der Formel 3 auf Gase. Mit Vernachlässigung der Schwere wird

$$v = \sqrt{2g\frac{p_0 - p}{\sigma}}.$$

Was heifst das in Worten?

7. Schornstein. Ist σ das specifische Gewicht der warmen Schornsteinluft, σ' das der von ihr verdrängten atmosphärischen Luft, H die Höhe des Schornsteins und vernachlässigt man v_0, die Geschwindigkeit der zur Feuerung heranströmenden kalten

Luft, gegen v, die Geschwindigkeit der aus dem Schornstein steigenden Luft, so wird (abgesehen von Widerständen)

$$v = \sqrt{2\,g\,H\,\frac{\sigma' - \sigma}{\sigma}} = \sqrt{2\,g\,H\,\frac{t - t'}{1 + \alpha t'}}$$

wobei tt' die innere und äufsere Temperatur bezeichnen, $\alpha = 1:273$. Man entwickele diese Formeln und drücke sie in Worten aus.

64. Der elektrische Strom. — Auch die Erscheinungen der elektrischen Strömung schreibt man der Strömung einer vollkommen unzusammendrückbaren Flüssigkeit, des elektrischen Fluidums, zu. Wir denken uns ein kurzes Leiterstück vom Querschnitt F und der Länge s — beispielsweise einen kurzen Cylinder — durchflossen mit der Geschwindigkeit v. Die Stromstärke ist, wenn δ die Masse der Volumeinheit des Fluidums bezeichnet,

$$J = Fv\delta.$$

Da nun das Fluidum unzusammendrückbar ist, so mufs es mit derselben Geschwindigkeit aus dem betrachteten Leiterstück austreten, mit der es eingetreten ist, kann also auf dem Wege s keine Zunahme an kinetischer Energie erleiden. Die am Anfangs- und Endquerschnitt wirkenden Drucke $p_1 p_2$ leisten aber die Arbeit $(p_1 - p_2)Fs$. Ebensoviel Arbeit mufs auf dem Wege s verbraucht werden. Man gelangt nun zu den experimentell festgestellten Gesetzen der elektrischen Strömung, wenn man die Hypothese macht, dafs sich der Strömung des Fluidums eine Kraft K widersetzt, welche der durchströmenden Masse und der Strömungsgeschwindigkeit proportional ist (Proportionalitätsfaktor $\varkappa\delta$)

$$K = \varkappa\delta\,.\,\delta Fs\,.\,v.$$

Denn diese verbraucht die Arbeit Ks und es findet daher keine Energiezunahme statt, sobald

$$\varkappa\delta\,.\,\delta Fs\,.\,v\,.\,s = (p_1 - p_2)Fs$$

1. $$J\,.\,w = (p_1 - p_2):\delta$$

wobei 2. $$w = \frac{\varkappa\,.\,s}{F}.$$

Ferner ist die Arbeit

$$Ks = \varkappa\delta\,.\,\delta Fs\,.\,v\,.\,s = (p_1 - p_2)Fs$$

auf dem Leiterstück während der Zeit $s : v$ verbraucht worden, daher in der Zeit 1 verbraucht wird

$$3. \qquad A = (p_1 - p_2) F v = \frac{p_1 - p_2}{\delta} J.$$

Setzt man ferner

$$4. \qquad \frac{p_1}{\delta} = P_1 \qquad \frac{p_2}{\delta} = P_2,$$

so erhält man die Gleichungen

$$5. \qquad J w = P_1 - P_2, \quad w = \frac{\varkappa s}{F} = \frac{s}{k F}$$

$$6. \qquad A = J(P_1 - P_2) = J^2 w.$$

Diese Gleichungen stimmen aber mit den experimentell festgestellten Gesetzen der elektrischen Strömung überein, wenn man die dem Drucke proportionale Gröfse P als elektrisches Potential, und die nur von der Beschaffenheit des Leiterstückes abhängige Gröfse w als elektrischen Widerstand bezeichnet. Die Gröfse $\varkappa$ ist für verschiedene Substanzen verschieden, sie ist der Widerstand eines ccm der Substanz und heifst bekanntlich specifischer Widerstand, ihr Reciprokes k specifisches Leitungsvermögen.

Gleichung 5 spricht nun für das betrachtete beliebig kurze Leiterstück das Ohm'sche Gesetz aus: Das Produkt aus Stromstärke und Widerstand gleicht der Potentialdifferenz des Leiters.

Gleichung 6 ist der Ausdruck des Joule'schen Gesetzes: Das Produkt aus Stromstärke und Potentialdifferenz giebt die von letzterer verursachte im Leiter pro Sekunde entwickelte Arbeit.

Aus der Hypothese also, dafs der elektrische Strom die Strömung einer vollkommenen, unzusammendrückbaren Flüssigkeit sei, welcher die Atome und Molekeln der durchströmten Leiter mit einer Kraft K widerstehen, folgen die experimentell festgestellten Erscheinungen der elektrischen Strömung. Die Arbeit A, welche in der Zeiteinheit von der Kraft K verbraucht wird, erscheint als Energie der Atome und Molekeln wieder (Arbeit chemischer Zersetzung, Wärme, Arbeit der Elektromotoren); die Kraft K kann als Reibung zwischen den Atomen und dem elektrischen

Fluidum angesehen werden, da auch die Reibung einen derartigen Umsatz der Energie bewirkt.

Nach den Gesetzen von Ohm und Joule kann man nun die Strömungserscheinungen in jeder Leitung ermitteln, wenn man noch bedenkt, was aus der Unzusammendrückbarkeit folgt, dafs nämlich zu jedem Teil der Leitung ebensoviel elektrisches Fluidum strömen mufs, wie von ihm weg strömt, so dafs die Stromstärke J in allen Teilen einer einfach geschlossenen Leitung die gleiche ist.

Wir entwickeln noch aus Gl. 5 und 6 die Gesetze der einfach geschlossenen Leitung.

Denkt man sich n solcher kurzen Leiterstücke, wie wir vorher eines betrachtet haben, aneinandergereiht, sämtlich von verschiedenem $\varkappa$, s, F, so ergeben die für ein jedes aufgestellten Gleichungen 5

$$7.\quad \begin{cases} Jw_1 = P_0 - P_1, \quad Jw_2 = P_1 - P_2, \quad \ldots\ldots \quad Jw_n = P_{n-1} - P_n \\ w_1 = \dfrac{\varkappa_1 s_1}{F_1} \qquad w_2 = \dfrac{\varkappa_2 s_2}{F_2} \qquad \ldots\ldots \qquad w_n = \dfrac{\varkappa_n s_n}{F_n} \end{cases}$$

$$8.\quad \begin{cases} JW = P_0 - P_n \\ W = w_1 + w_2 + \ldots + w_n. \end{cases}$$

Hiernach kann in einer Leitung nur dann ein Strom vorhanden sein, wenn der Druck an dem einen Ende gröfser ist als am anderen. Das elektrische Fluidum strömt von Stellen höheren Potentials zu solchen niedrigeren Potentials. Darnach kann man die Höhe des Potentials beurteilen, wenn noch festgesetzt wird, dafs das Potential der Erde gleich 0 ist. Trägt man die Widerstände w_1, w_2, ... aneinander auf einer Geraden auf und errichtet in den Endpunkten der einzelnen Strecken Lote, auf denen man die entsprechenden P aufträgt, so liegen deren Endpunkte in einer Geraden, der Potentiallinie. Die Stromstärke wird dann dargestellt durch das Gefälle dieser Linie, d. i. die Tangente ihres Neigungswinkels gegen die Achse, auf welcher die w aufgetragen wurden.

In einer geschlossenen Leitung kann ein elektrischer Strom nur dann herrschen, wenn an einer oder mehreren Stellen der Leitung Vorrichtungen eingeschaltet sind, welche eine gewisse Potentialdifferenz (oder Druckdifferenz) aufrecht erhalten. Solche Vorrichtungen sind die galvanischen und thermoelektrischen Batterien, sowie die

magneto- und dynamoelektrischen Maschinen. Analogie mit einer in sich geschlossenen Wasserleitung, in die ein Pumpwerk eingeschaltet ist. Ist $P - P'$ die Potentialdifferenz der beiden Klemmen der Batterie, die Klemmenspannung, W_a der äufsere Widerstand, so mufs nach dem Vorangehenden die Gleichung bestehen

$$9. \qquad J W_a = P - P'.$$

Die in der Batterie wirkenden Ursachen der Erhaltung dieser Potentialdifferenz nennt man elektromotorische Kräfte. Wirkt z. B. zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Teilen der oben betrachteten Reihe von n Leitern eine elektromotorische Kraft e, so ist

$$7^b. \begin{cases} J w_1 = P_0 - P_1', \quad J w_2 = P_1 - P_2', \quad \ldots\ldots \quad J w_n = P_{n-1} - P_n' \\ e_1 = P_1 - P_1', \qquad e_2 = P_2 - P_2' \ldots\ldots \end{cases}$$

und die Addition ergiebt dann

$$8^b. \; JW = P_0 - P_n' + E, \; E = e_1 + e_2 + \ldots + e_n, \; W = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$$

wo E die elektromotorische Gesamtkraft der Leitung genannt wird. Die Potentiallinie besteht in diesem Falle aus einer Reihe paralleler Geraden vom Gefälle J. Bezeichnet W_i den inneren Widerstand einer Batterie, deren Klemmenspannung $P - P'$ ist, so mufs hiernach gelten

$$9^b. \qquad J W_i = E - (P - P').$$

Der Strom durchfliefst nämlich den äufseren Widerstand in der Richtung vom höheren Potentiale P zum niederen P', den inneren also in der Richtung von P' zu P, was eben nur durch elektromotorische Kräfte möglich ist.

Aus Gl. 9 und 9^b folgt das Ohmsche Gesetz (1825) für die ganze einfach geschlossene Leitung

$$10, \qquad J(W_i + W_a) = E.$$

Das Produkt aus Stromstärke und Gesamtwiderstand einer einfach geschlossenen Leitung gleicht der elektromotorischen Gesamtkraft.

Die Schlüsse, die von Gl. 5 zu Gl. 10 führten, gestatten aus Gl. 6 das Joulesche Gesetz (1841) für die geschlossene Leitung zu entwickeln

$$11. \qquad JE = \mathsf{A}.$$

Das Produkt aus Stromstärke und elektromotorischer Kraft giebt die gesamte pro Sekunde in der Leitung entwickelte, von den elektromotorischen Kräften verursachte, Arbeit.

Aus den Gleichungen 5 und 6 oder aus 10 und 11 folgt, dafs die Einheiten des Potentials, der Stromstärke und des Widerstandes nicht unabhängig von einander sind. Nur für die Einheit einer dieser Gröfsen steht die Wahl noch frei. Hat man als Stromeinheit die 1881 allgemein eingeführte durch die elektromagnetischen Wirkungen bestimmte Einheit 1 Ampère gewählt, so mufs nach Gl. 6 oder 11 die Einheit des Potentials und der elektromotorischen Kraft so gewählt werden, dafs das Produkt aus ihr und 1 Ampère die Einheit der Arbeit pro Sekunde giebt, in absolutem Mafse 1 kg $m^2 : sec^3$. Die so gewählte Einheit des Potentials heifst 1 Volt. Ferner mufs nach Gl. 5 oder 10 die Widerstandseinheit so bestimmt werden, dafs das Produkt aus ihr und 1 Ampère einem Volt gleicht. Diese Einheit des Widerstandes heifst 1 Ohm. Also

$$1 \text{ Volt} \times 1 \text{ Ampère} = 1 \text{ kg m}^2 : \text{sec}^3, \quad 1 \text{ Ohm} \times 1 \text{ Ampère} = 1 \text{ Volt}.$$

Um die Gröfse dieser Einheiten beurteilen zu können, diene folgendes:

1 Volt = 0,89 Daniell
1 Ohm = 1,0615 Siemens

1 Ampère scheidet 3,69 g Silber in der Stunde ab.

$$1 \text{ Volt-Ampère} = \frac{1}{9,808} \text{ kg m : sec} = \frac{1}{736} \text{ Pferdestärke.}$$

Übungen.

1. Wie grofs ist der specifische Widerstand (Widerstand von 1 ccm) für Quecksilber? Ferner für Eisen, Kupfer, Silber, deren Leitungsfähigkeiten bez. 8, 55, 64 sind, wenn die des Quecksilbers gleich 1 gesetzt wird?

2. Welchen Widerstand bietet ein Kilometer Telegraphendraht aus Eisen von 4 mm Durchmesser in Siemenseinheiten, in Ohms?

3. Die Klemmenspannung einer Batterie ist 10 Volt, der äufsere Widerstand wird durch 1 km Kupferdraht von 1 mm Durchmesser gebildet. Man zeichne die Potentiallinie (indem man 1 Volt durch 1 cm, 1 Ohm ebenfalls durch 1 cm darstellt), 1) für den Fall, dafs der positive, 2) für den, dafs der negative Pol zur

Erde abgeleitet ist, 3) für den Fall, dafs beide entgegengesetzt gleiches Potential besitzen. Wie grofs ist die Stromstärke? Wie grofs ist die elektromotorische Kraft dieser Batterie, wenn noch der innere Widerstand $W_i = 10$ Ohm gegeben ist?

4. Man bestätige das Ohmsche Gesetz durch folgende Rechnung. Ein Daniellsches Element wurde durch eine Tangentenbussole geschlossen, die $62^0\ 0'$ Ablenkung zeigte. Bei Einschaltung von 10, 40, 100 m Kupferdraht erhielt man die Ablenkungen $28^0\ 30'$, $9^0\ 45'$, $4^0\ 15'$. Man berechne den inneren Widerstand des Elements (nebst Bussole), ausgedrückt in Länge des angewendeten Kupferdrahts aus je einer der letzten drei Beobachtungen und der Ablesung bei blofser Einschaltung der Tangentenbussole. Die drei Werte müssen nahe übereinstimmen. Wie grofs müfste die Ablenkung bei den drei letzten Beobachtungen ausgefallen sein, wenn das Mittel der drei Werte für den inneren Widerstand der wahre innere Widerstand wäre? (Pouillet-Pfaundler.)

5. Ein Daniell giebt $67^0\ 0'$ Ablenkung an der Tangentenbussole, bei Einschaltung von 40 m Kupferdraht nur noch $10^0\ 20'$. Wie grofs ist der innere Widerstand? Sechs solche Daniell geben $68^0\ 30'$, bei Einschaltung von 40 m $39^0\ 0'$, bei Einschaltung von 100 m $21^0\ 30'$. Man prüfe die Übereinstimmung dieser Zahlen mit dem Ohmschen Gesetze. (Pouillet-Pfaundler.)

6. Kirchhoffsche Gesetze. Man leite aus Gl. 5 das Gesetz ab: In jedem geschlossenen Umlaufe einer beliebig verzweigten Leitung ist die Summe der Produkte gebildet aus der Stromstärke und dem Widerstande jedes einzelnen Stückes dieses Umlaufs gleich der elektromotorischen Kraft in diesem Umlaufe. — Aus welcher Voraussetzung der im Texte entwickelten Theorie des Stromes folgt der zweite Kirchhoffsche Satz: An jedem Verzweigungspunkte einer beliebig verzweigten Leitung ist die Summe der zufliefsenden Stromstärken gleich der Summe der wegfliefsenden.

7. Die Klemmenspannung einer Batterie und der äufsere Widerstand wie in Üb. 3. Das mittelste Drittel AB der Leitung ist verzweigt, so dafs von A nach B aufser $\frac{1}{3}$ km Draht noch ein zweiter Kupferdraht führt von 1 km Länge und 1 mm Durchmesser. Man zeichne die Potentialkurve für die Hauptleitung und die Abzweigung und berechne die Stromstärken aller Teile.

8. Während ein Daniellsches Element einen elektrischen Strom erzeugt, wird Zink in Zinksulfat übergeführt und aus Kupfersulfat Kupfer niedergeschlagen. Wieviel g Zink und wieviel g Wasserstoff scheidet nach Faradays elektrolytischem Gesetze 1 Ampère ab pro sec? Nun hat Thomsen ermittelt, dafs, wenn die 1 kg Wasserstoff äquivalente Menge Zink in Zinksulfat übergeht, 53 045 Calorien entwickelt werden und wenn die 1 kg (H_2) äquivalente Kupfermenge in Sulfat übergeht, 27 980 Calorien entstehen, wäh-

rend sie beim umgekehrten chemischen Prozefs frei werden. Man berechne hieraus die im Daniell bei Erzeugung der Stromeinheit verbrauchte Wärme. Wieviel beträgt deren Arbeitsäquivalent in Gravitations- und in absolutem Mafse? Aufl.: In absolutem Mafse ist es nahe so grofs wie die vom Daniell entwickelte Arbeit pro sec. Äquivalente: H 1, Ag 108, Zn 32,5.

9. Wie grofs ist die elektromotorische Kraft des Voltaschen Bechers, wenn bei Übergang der 1 kg (H_2) äquivalenten Menge Zink in Sulfat 53 045 Calorien, bei Entstehung von H_2O aus 1 kg (H_2) aber 34 180 Calorien entwickelt werden? Aufl.: 0,75 Daniell.

10. Dasselbe für das Bunsensche und Grovesche Element, wozu noch zu wissen nötig, dafs bei Vereinigung von der 1 kg (H_2) äquivalenten Menge N_2O_4 mit O und H_2O zu $2\,NHO_3$ 10010 Calorien entwickelt werden.

11. Wieviel ccm Knallgas entwickelt 1 Ampère in der Minute? 1 ccm Knallgas wiegt 0,53613 mg. Aufl. 9,6 ccm.

12. Eine Gramme-Maschine C liefert bei 1200 Umdrehungen in der Minute 81,22 Ampères bei 69,9 Volts elektromotorischer Kraft. Welche Arbeit verbraucht sie mindestens? Aufl. 29 kg . m pro Umdrehung. Thatsächlich verbrauchte sie 36 kg . m.

Inhalt.

Erster Abschnitt. Allgemeine Mechanik.

Zweiter Abschnitt. Mechanik des starren Körpers.

Dritter Abschnitt. Mechanik des elastischen Körpers.

Vierter Abschnitt. Mechanik des flüssigen Körpers.
